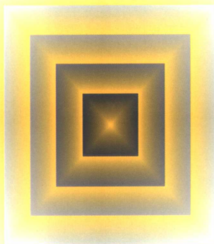
随机逼近及自适应算法

西安交通大学数学研究生教学丛书

聂赞坎　徐宗本　编著





科学出版社
www.sciencep.com

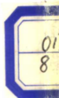
责任编辑／林 鹏 杨 波 · 封面设计／高海英 王 浩 · 责任印制／安春生
(O-1633.0101)

随机逼近及自适应算法

西安交通大学 数学研究生教学丛书

计算力学	张 武等
计算智能中的仿生理论和算法	徐宗本等
数值计算的算法与分析	张可村等
统计推断导引	范金城等
抽象代数	盛德成
偏微分方程现代数值方法	黄艾香等
常微分方程定性与稳定性方法	马知恩等
随机逼近及自适应算法	聂赞坎等
近代优化方法	徐成贤等
应用非线性分析	陈红斌等
动力系统基础及其方法	陈绥阳等
粗糙集理论与方法	张文修等
计算机数学	陈志平等





ISBN 7-03-010534-6
定 价：19.00 元

西安交通大学数学研究生教学丛书

随机逼近及自适应算法

聂赞坎　徐宗本　编著

科学出版社
北京

内 容 简 介

本书系统地介绍了随机逼近理论，着重介绍了几类自适应算法以及随机逼近理论对它们的应用．作为一本研究生教材，本书难度适中，注重基础知识的讲述，深入浅出，易于自学．

读者对象：高等院校数学系高年级学生，信息科学、计算机科学、运筹学、应用数学等专业的研究生．

图书在版编目(CIP)数据

随机逼近及自适应算法/聂赞坎，徐宗本编著．—北京：科学出版社，2003.1

(西安交通大学数学研究生教学丛书)

ISBN 7-03-010534-6

Ⅰ．随…　Ⅱ．①聂…　②徐…　Ⅲ．①随机逼近-研究生-教材②自适应控制-算法理论-研究生-教材　Ⅳ．①O174.41　②TP273

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 047935 号

责任编辑：林　鹏　杨　波/责任校对：宣　慧

责任印制：安春生/封面设计：高海英　王　浩

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

新蕾印刷厂 印刷

科学出版社发行　各地新华书店经销

*

2003年1月第 一 版　　开本：B5（720×1000）

2003年1月第一次印刷　　印张：9 1/2

印数：1—3 000　　字数：176 000

定价：19.00 元

前　　言

随机逼近算法可以理解为是利用观测值估计未知函数的极值或未知方程解的自适应问题求解技术.它起源于20世纪50年代初Ribbins和Monro所提出的求未知函数零点的一个递推算法(称之为RM算法)以及此后Kiefer和Wolfowitz等人有关未知函数极值问题的研究.随机逼近理论(即随机逼近算法的理论基础与分析)近几十年来得到了飞速发展,已成为数理统计与人工智能的交叉分支,并已广泛地应用于系统辩识、自适应控制、模式识别、自适应滤波、神经元网络等领域.有关随机逼近理论的研究,近几年出现了Albert Benveniste、Lennart Ljung、陈翰馥等国内外著名学者的专著,它们对随机逼近理论的方方面面作了系统、深入的阐述.这些著作虽各有深入讨论的侧重面,但由于篇幅过大,论题过多,对初学者来说,不易掌握.本书的编写目的在于向读者(特别是数学系研究生)提供一本难度适中、内容基本、易于自学的教学用书.因此,本书的前一部分(第一章～第四章)着重介绍随机逼近基础理论中的核心问题(随机逼近算法的收敛性)和基本的收敛性结果,以及这些基本结果在一些具体自适应性算法中的应用.本书后一部分集中介绍近几年随高性能计算机发展而出现的几类自适应算法(遗传算法、模拟退火算法、主成分分析神经网络算法)以及随机逼近理论对它们的应用.

遗传算法是模拟自然界生物进化过程与机制求解极值问题的一类自适应算法.它的产生归功于美国Michigan大学的Holland在20世纪60年代末70年代初的开创性工作.他不仅设计了遗传算法的模拟与操作原理,而且更重要的是运用统计决策理论对遗传算法的搜索机理进行了理论分析,从而为遗传算法的发展奠定了基础.近十几年来,遗传算法无论是在应用上,还是在基础理论上都取得了长足发展,已成为信息科学、计算机科学、运筹学和应用数学诸多学科所共同关注的热点研究领域.但相对卓有成效的、广泛的实际应用而言,遗传算法的数学基础理论研究还相对滞后,还不能说很完善或很深入.近期研究主要是围绕如何提高算法效率和建立算法理论基础方面.本书第五章和第六章专门讨论遗传算法的随机过程分析及其收敛性分析,其中大部分内容是西安交通大学理学院信息与系统科学研究所师生们近期的科研成果.

模拟退火算法源于对固体退火过程的模拟,是解全局优化问题(特别是组合优化问题)的一种通用自适应方法.该类方法以随机方法为基础,结合一系列相关迭代算法,既克服了迭代算法的一些本质缺陷(如收敛的局部性,通常只收敛到问题的局部极小),而又保持了它们的突出优点,如快速局部收敛和

所获得的解不依赖于初始状态等.本书第七章专门讨论马尔可夫链模型的模拟退火算法,介绍齐次算法和非齐次算法的一些渐近收敛性结果.

主成分分析是一种经典的统计技术,它用于分析多变量统计观察的方差结构,它与估计理论中的最小方差技术,时间序列分析中的 Karhunen Loeve 变换和数值分析中的奇异值分解密切相关.这些方法在信号处理、图像编码、信息压缩等领域有十分基本而重要的应用.近年来,人们利用神经网络技术求解主成分显示出极大的优越性,许多用于求解主成分的神经网络算法问世.这些主成分分析神经网络算法的突出优点是它们的自组织性和自适应性,而且易于硬件实现.本书最后一章介绍与此相关的一些简单、通用算法,并且作为随机逼近理论的应用,研究这些算法的收敛性质.

全书共分八章.第一章给出本书必需的概率论方面的预备知识.第二章介绍研究随机逼近算法的三种常用方法.第三章讨论形式非常一般的具有局部有界矩随机逼近算法的几乎必然收敛性.第四章将第三章的收敛性结果应用于一些具体的适应性算法,获得这些算法的几乎必然收敛性.第五章介绍遗传算法的基本概念、过程分析和遗传算法的 Markov 链模型.第六章对抽象的(算子型)遗传算法在各种意义下的收敛性进行了讨论,并对两类特殊类型遗传算法的收敛性进行了细致分析.第七章建立模拟退火算法的马尔可夫链模型,介绍齐次算法和非齐次算法的一些渐近收敛性结果.第八章介绍一些简单、通用的主成分分析神经网络算法,并利用随机逼近理论研究这些算法的收敛性.

本书的主要内容曾经在西安交通大学理学院应用数学系硕士生的课程上讲授过,有不少内容是直接由文献改写的.限于作者自身水平,难免有遗漏与不妥之处,恳请读者批评与指正.

编　著

2002 年 8 月

于西安交通大学

目　录

第一章　预备知识

本章给出阅读本书所必需的若干预备知识,包括概率论、离散参数鞅和马尔可夫链等领域中与本书有关的一些事实与概念.

§1.1　概率论的若干基本概念

1.1.1　随机变量及其分布

设$(\Omega,\mathscr{F},P)$为一概率空间,X是在Ω上定义的实值函数,记$X^{-1}(B)=\{\omega:X(\omega)\in B\}$,$B\subset R$,$X^{-1}(B)$称为集合$B$的原像.

定义 1.1.1　定义在可测空间$(\Omega,\mathscr{F})$上的实函数X,如果对数直线上任意 Borel 集B,$X^{-1}(B)\in\mathscr{F}$,则称X为$\mathscr{F}$可测,概率空间上的可测函数也称为随机变量.

对可测函数X,集系$\{X^{-1}(B):B\in\mathscr{B}(R)\}$构成一个$\sigma$域,称为由$X$生成的$\sigma$域,记为$\sigma(X)$,其中$\mathscr{B}(R)$是$R$上的 Borel 域.对于随机变量$X$,定义函数

$$F(x)=P\{\omega:X(\omega)\leqslant x\},\quad x\in R,$$

$F(x)$称为X的分布函数.

1.1.2　随机变量列的收敛性

设$\{X,X_n\}$为一列随机变量.

(1)如果对于任意正数ϵ,有$\lim\limits_{n\to\infty}P(|X_n-X|>\epsilon)=0$,则称$\{X_n\}$依概率收敛到$X$,记作$X_n\xrightarrow{P}X,n\to\infty$.

(2)如果$P(\lim\limits_{n\to\infty}X_n=X)=1$,则称随机变量列$X_n$概率 1 收敛到$X$,或称随机变量列$X_n$几乎处处收敛到$X$,记作$X_n\xrightarrow{a.s.}X,n\to\infty$.

(3)如果$\lim\limits_{n\to\infty}E(|X_n-X|^2)=0$,则称随机变量列$X_n$均方收敛到$X$,记作$X_n\xrightarrow{L^2}X,n\to\infty$.

上面各种收敛性有如下关系

$$X_n\xrightarrow{a.s.}X,n\to\infty\Rightarrow X_n\xrightarrow{P}X,n\to\infty\Leftarrow X_n\xrightarrow{L^2}X,n\to\infty.$$

$$X_n \xrightarrow{P} X, n \to \infty \Rightarrow \text{存在子列 } X_{n_k} \xrightarrow{a.s.} X, k \to \infty.$$

1.1.3　随机变量的期望和条件期望

定义 1.1.2　设随机变量 $X \geqslant 0, a.s.$，记

$$A_{ni} = \{\omega : i2^{-n} < X(\omega) \leqslant (i+1)2^{-n}\}, \quad n, i = 1, 2, \cdots$$

X 的数学期望 EX 定义为

$$EX = \int_\Omega X\mathrm{d}P = \lim_{n \to \infty}\Big[\sum_{i=0}^{n2^n-1} i2^{-n}P(A_{ni}) + nP(X > n)\Big].$$

对不是非负的随机变量 X，可表为正部 $X^+ = \max(X, 0)$ 与负部 $X^- = \max(-X, 0)$ 的差 $X = X^+ - X^-$，如果 $EX^+ < \infty$ 或 $EX^- < \infty$，则定义 X 的数学期望 $EX = EX^+ - EX^-$；当 $EX^+ < \infty, EX^- < \infty$ 时，称 X 是可积的；当 EX 有定义时，它还可表为 Lebesgue-Stieltjes 积分

$$EX = \int_{-\infty}^{\infty} x\mathrm{d}F(x).$$

由初等概率论知，在事件 $A(P(A) > 0)$ 发生的条件下，事件 B 发生的条件概率定义为

$$P(B \mid A) = P(AB)/P(A), \tag{1.1.1}$$

如果 $P(A) = 0$，就规定 $P(B|A) = 0$.

固定 $A(P(A) > 0)$，$P(\cdot|A)$ 是 $\mathscr{F}$ 上的概率测度，(1.1.1)式可写成

$$\int I_B(\omega)P(\mathrm{d}\omega \mid A) = \frac{1}{P(A)}\int_A I_B(\omega)P(\mathrm{d}\omega),$$

其中 I_B 表示集 B 的示性函数. 因此随机变量 X 关于 A 的条件数学期望可定义为

$$E(X \mid A) = \int_\Omega X(\omega)P(\mathrm{d}\omega \mid A) = \frac{1}{P(A)}\int_A X(\omega)P(\mathrm{d}\omega). \tag{1.1.2}$$

如果 $P(A) = 0$，则规定 $E(X|A) = 0$. 特别当 $X(\omega) = I_B(\omega)$ 时，(1.1.2)就化为(1.1.1)，故我们只须考虑条件期望.

将 $E(X|A)$ 推广如下：考虑 Ω 的某一可测分割 $A_1, A_2, \cdots$，即对一切 $i \geqslant 1, A_i \in \mathscr{F}, A_iA_j = \varnothing, i \neq j, \sum_{i=1}^{\infty} A_i = \Omega$. 为了从整体上考查 $E(X|A_i), i = 1, 2, \cdots$，定义随机变量 $Y(\omega)$ 如下

$$Y(\omega) = \sum_{i=1}^{\infty} E(X \mid A_i)I_{A_i}(\omega), \tag{1.1.3}$$

于是当 $E(|X|) < \infty, P(A_i) > 0$ 时，由(1.1.2)，(1.1.3)知

$$\int_{A_i} X(\omega)P(\mathrm{d}\omega) = P(A_i)E(X \mid A_i) = \int_{A_i} Y(\omega)P(\mathrm{d}\omega), \quad (1.1.4)$$

如果 $P(A_i)=0$,上式两边都等于零,故(1.1.4)仍然成立.易见,当取$\{A, A^c\}$,$P(A)>0$,为 Ω 的可测分割时,在(1.1.4)中以 A 代替 A_i 即得(1.1.2).令 $\mathscr{G}=\sigma(A_i: i=1,2,\cdots)$是含一切$\{A_i: i=1,2,\cdots\}$的最小 σ 域.由于 $\mathscr{G}$ 中元素(除空集外)都是某些 A_i 的併集,故由(1.1.4)知,对一切 $B\in\mathscr{G}$,有

$$\int_B X(\omega)P(\mathrm{d}\omega) = \int_B Y(\omega)P(\mathrm{d}\omega), \quad (1.1.5)$$

记 $Y=E(X|\mathscr{G})$,则 $E(X|\mathscr{G})$具有性质:

(1)$E(X|\mathscr{G})$是 $\mathscr{G}$ 可测. (1.1.6)

(2)$\forall B\in\mathscr{G}$, $\int_B X(\omega)P(\mathrm{d}\omega) = \int_B E(X \mid \mathscr{G})(\omega)P(\mathrm{d}\omega)$. (1.1.7)

根据上面对特殊的 σ 域 $\mathscr{G}$ 讨论的启示,我们将条件期望推广到一般的 σ 域.

定义 1.1.3 给定随机变量 X 及 $\mathscr{F}$ 的子 σ 域 $\mathscr{G}$,$E(|X|)<\infty$,称随机变量 $E(X|\mathscr{G})$为 X 关于 $\mathscr{G}$ 的条件数学期望,如果它满足(1.1.6)和(1.1.7).

为使上述定义有意义,必须保证满足(1)和(2)的随机变量存在.为此考查集函数

$$\varphi(B) = \int_B X\mathrm{d}P, \qquad \forall B \in \mathscr{G},$$

易知,$\varphi(\cdot)$是 $\mathscr{G}$ 上广义测度,而且如果 $P(B)=0$,则有 $\varphi(B)=0$.即 φ 在 $\mathscr{G}$ 上关于测度 P 绝对连续、根据 Radon-Nikodym 定理,在关于测度 P 几乎处处相等的意义下,满足(1)和(2)的随机变量 $E(X|\mathscr{G})$惟一存在.我们说 X 关于 $\mathscr{G}$ 的条件数学期望时,指的是上述等价类中的一个代表.

例 1.1.4 若随机变量 X 关于 $\mathscr{G}$ 独立,则有

$$E(X \mid \mathscr{G}) = EX. \quad (1.1.8)$$

证明 因为 EX 关于 $\mathscr{G}$ 可测,且$\forall B\in\mathscr{G}$,

$$\int_B X\mathrm{d}P = E(XI_B) = E(X)P(B) = \int_B EX\mathrm{d}P.$$

例 1.1.5 若 $\mathscr{G}=\mathscr{F}$或 X 为 $\mathscr{G}$ 可测,则有

$$E(X \mid \mathscr{G}) = X, \quad a.s. \quad (1.1.9)$$

特别$\forall B\in\mathscr{G}$有

$$P(B \mid \mathscr{G}) = I_B, \quad a.s. \quad (1.1.10)$$

例1.1.6 假设X与Y同时为连续型随机变量,$E(|Y|)<\infty$,而且(X,Y)有联合概率密度 $f(x,y)$,$x,y\in R$,如果 $\mathscr{G}=\sigma(X)$,即 $\mathscr{G}$ 是包含一切$\{(X\in B), B\in\mathscr{B}(X)\}$的最小 σ 域,则 $E(Y|\mathscr{G})$与概率论中定义的 Y 关于X 的条件期望一致.事实上,Y 在$X=x$ 条件下的条件概率密度定义为

$$f(y|x)=f(x,y)/p(x),\qquad p(x)>0,\tag{1.1.11}$$

其中 $p(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\mathrm{d}y$,当 $p(x)=0$ 时,规定(1.1.11)左方值为零. 于是 Y 在 $X=x$ 条件下的条件期望为

$$E(Y|X=x)=\int_{-\infty}^{\infty}yf(y|x)\mathrm{d}y=g(x),\tag{1.1.12}$$

由(1.1.11)和(1.1.12)知右方为 x 的可测函数,因此得到可测函数

$$g(x)=E(Y|X=x),\qquad x\in R,$$

可见,Y 关于 X 的条件期望 $E(Y|X)=g(X)$ 为 $\sigma(X)$ 可测;往证 $\forall B\in\sigma(X)$,有

$$\int_B g(X)\mathrm{d}P=\int_B Y\mathrm{d}P,\tag{1.1.13}$$

假设 $h(x)$ 为任意有界可测函数,$A=\{x:p(x)>0\}$,则有

$$\begin{aligned}E(h(X)Y)&=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}h(x)yf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\int_A\left[\int_{-\infty}^{\infty}y\frac{f(x,y)}{p(x)}\mathrm{d}y\right]p(x)h(x)\mathrm{d}x\\&=\int_A g(x)p(x)h(x)\mathrm{d}p\\&=\int_\Omega g(X)h(X)\mathrm{d}p.\end{aligned}$$

如果在上式中令 $h(x)=I_\Gamma(x)$,$\Gamma\in\mathscr{B}(R)$ 则有

$$\int_{(X\in\Gamma)}Y\mathrm{d}p=\int_{(X\in\Gamma)}g(X)\mathrm{d}p,$$

即(1.1.13)成立,可见 $g(X)=E(Y|\mathscr{G}),a.s.$.

1.1.4　条件期望的基本性质

以下提到的随机变量 X,X_n 均假设是可积的. 不等式,等式及极限关系都是几乎处处成立,不另再声明.

性质 1.1.7　对于任意实数 c_i,$i=1,2$,有

$$E\Big(\sum_{i=1}^{2}c_iX_i|\mathscr{G}\Big)=\sum_{i=1}^{2}c_iE(X_i|\mathscr{G}).$$

证明　由定义知 $\sum\limits_{i=1}^{2}c_iE(X_i|\mathscr{G})$ 为 $\mathscr{G}$ 可测,而且 $\forall B\in\mathscr{G}$,有

$$\begin{aligned}\int_B\Big[\sum_{i=1}^{2}c_iE(X_i|\mathscr{G})\Big]\mathrm{d}p&=\sum_{i=1}^{2}c_i\int_B E(X_i|\mathscr{G})\mathrm{d}p\\&=\sum_{i=1}^{2}c_i\int_B X_i\mathrm{d}p=\int_B\Big(\sum_{i=1}^{2}c_iX_i\Big)\mathrm{d}p.\end{aligned}$$

性质 1.1.8

(1)如果 $X\geqslant 0$,则有 $E(X|\mathscr{G})\geqslant 0$.

(2)如果 $X_1\geqslant X_2$,则有 $E(X_1|\mathscr{G})\geqslant E(X_2|\mathscr{G})$.

证明 设 $X\geqslant 0$,令

$$B=\{\omega:E(X|\mathscr{G})(\omega)<0\},$$
$$B_m=\{\omega:E(X|\mathscr{G})(\omega)<-1/m\},\quad m=1,2,\cdots,$$

易见 $B=\sum_{m=1}^{\infty}B_m$,而且

$$-\frac{1}{m}p(B_m)\geqslant\int_{B_m}E(X|\mathscr{G})\mathrm{d}p=\int_{B_m}X\mathrm{d}P\geqslant 0,$$

所以 $p(B_m)=0$,$p(B)=0$,(1)成立;由(1)及性质 1.1.7 推得(2)成立.

性质 1.1.9 $|E(X|\mathscr{G})|\leqslant E(|X||\mathscr{G})$.

证明 由性质 1.1.7 和 1.1.8 直接推得.

性质 1.1.10(单调收敛定理) 假设 $0\leqslant X_n\uparrow X$,$n\to\infty$,则有

$$\lim_{n\to\infty}E(X_n|\mathscr{G})=E(X|\mathscr{G}).$$

证明 由 $0\leqslant X_n\leqslant X_{n+1}\leqslant X$ 得

$$0\leqslant E(X_1|\mathscr{G})\leqslant E(X_2|\mathscr{G})\leqslant\cdots\leqslant E(X|\mathscr{G}),$$

故对几乎所有 ω,$\lim\limits_{n\to\infty}E(X_n|\mathscr{G})(\omega)$存在,对极限不存在的 ω 定义极限值为零.如此规定后$\lim\limits_{n\to\infty}E(X_n|\mathscr{G})(\omega)$为 $\mathscr{G}$ 可测.往证它等于 $E(X|\mathscr{G})$.任取 $B\in\mathscr{G}$,根据积分的单调收敛定理得

$$\int_B\lim_{n\to\infty}E(X_n|\mathscr{G})\mathrm{d}p=\lim_{n\to\infty}\int_B E(X_n|\mathscr{G})\mathrm{d}p$$
$$=\lim_{n\to\infty}\int_B X_n\mathrm{d}p=\int_B X\mathrm{d}p,$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}E(X_n|\mathscr{G})=E(X|\mathscr{G}).$$

性质 1.1.11(Fatou 引理) 设随机变量列$\{X_n;n=1,\cdots\}$的每个 X_n 的期望存在.

(1)若存在随机变量 X,使 $EX>-\infty$,且 $\forall\ n\geqslant 1$,$X_n\geqslant X$,$a.s.$,则 $\varliminf\limits_{n\to\infty}X_n$ 的期望存在,且有

$$E[\varliminf_{n\to\infty}X_n|\mathscr{G}]\leqslant\varliminf_{n\to\infty}E[X_n|\mathscr{G}].$$

(2)若存在随机变量 X,使 $EX<\infty$,且 $\forall\ n\geqslant 1$,$X_n\leqslant X$,$a.s.$,则 $\varlimsup\limits_{n\to\infty}X_n$ 的期望存在,且有

$$E[\overline{\lim_{n\to\infty}} X_n|\mathscr{G}] \geqslant \overline{\lim_{n\to\infty}} E[X_n|\mathscr{G}].$$

证明　因为

$$0 \leqslant \inf_{k\geqslant n} X_k - X \uparrow \underline{\lim_{n\to\infty}} X_n - X,\quad n\to\infty,$$

由单调收敛定理得

$$\begin{aligned} E[\underline{\lim_{n\to\infty}} X_n|\mathscr{G}] - E[X|\mathscr{G}] &= E[\underline{\lim_{n\to\infty}} X_n - X|\mathscr{G}] \\ &= \lim_{n\to\infty} E[(\inf_{k\geqslant n} X_k - X)|\mathscr{G}] \\ &= \underline{\lim_{n\to\infty}} E[X_n - X|\mathscr{G}] \\ &= \underline{\lim_{n\to\infty}} E[X_n|\mathscr{G}] - E[X|\mathscr{G}]. \end{aligned}$$

从而(1)得证,类似地可以证明(2).

性质 1.1.12 (控制收敛定理)　假设 $|X_n| \leqslant Y$, Y 可积,而且 $\lim_{n\to\infty} X_n = X$,则有

$$\lim_{n\to\infty} E(X_n|\mathscr{G}) = E(X|\mathscr{G}).$$

证明　令

$$S_n = \sup_{k\geqslant n} X_k,\quad I_n = \inf_{k\geqslant n} X_k,$$

因为

$$|X_n| \leqslant Y,\quad S_n \downarrow X,\quad I_n \uparrow X,\quad n\to\infty,$$

$$0 \leqslant Y - S_n \downarrow Y - X,\quad 0 \leqslant Y + I_n \uparrow Y + X,\quad n\to\infty,$$

由单调收敛定理得

$$E(Y - S_n|\mathscr{G}) \downarrow E(Y - X|\mathscr{G}),\quad n\to\infty,$$

$$E(Y + I_n|\mathscr{G}) \uparrow E(Y + X|\mathscr{G}),\quad n\to\infty,$$

从而

$$\begin{aligned} E(X|\mathscr{G}) &= \lim_{n\to\infty} E(I_n|\mathscr{G}) \\ &\leqslant \underline{\lim_{n\to\infty}} E(X_n|\mathscr{G}) \\ &\leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}} E(S_n|\mathscr{G}) \\ &= E(X|\mathscr{G}). \end{aligned}$$

性质 1.1.13　如果随机变量 X 是 $\mathscr{G}$ 可测的,而且 $E(|XY|) < \infty$,则有

$$E(XY|\mathscr{G}) = XE(Y|\mathscr{G}). \tag{1.1.14}$$

证明　令

$$\dot{L} = \{X: E(|XY|) < \infty\},$$

$$\boldsymbol{L} = \{X: X \text{ 使(1.1.14) 满足}\},$$

由性质 1.1.7 和 1.1.10 容易证明 L 是 $\boldsymbol{L}$ 系,另外当 $X = I_A$, $A \in \mathscr{G}$ 时, X 是 $\mathscr{G}$

可测的,而且对于任意 $B\in\mathscr{G}$,有

$$\int_B XY\mathrm{d}p = \int_{AB} Y\mathrm{d}p = \int_{AB} E(Y|\mathscr{G})\mathrm{d}p = \int_B XE(Y|\mathscr{G})\mathrm{d}p,$$

故 $I_A\in L$,根据 $\boldsymbol{L}$ 系方法(参见文献[2]463 页引理 4)知 L 包含一切属于 $\boldsymbol{L}$ 且关于 $\mathscr{G}$ 可测的随机变量 X.

性质 1.1.14

(1)全数学期望公式:$E(E(X|\mathscr{G}))=EX$.

(2)重条件期望公式:当 $\mathscr{G}_1\subset\mathscr{G}_2$ 时,有

$$E(E(X|\mathscr{G}_1)|\mathscr{G}_2) = E(X|\mathscr{G}_1) = E(E(X|\mathscr{G}_2)|\mathscr{G}_1).$$

证明 (1)在(1.1.7)中令 $B=\Omega$,即得到(1).

(2)因为 $\mathscr{G}_1\subset\mathscr{G}_2$,故$E(X|\mathscr{G}_1)$为 $\mathscr{G}_2$ 可测,从而由例 1.1.5 的结论得第 1 个等式,为证明第 2 个等式,只需注意,如果 $B\in\mathscr{G}_1$,则 $B\in\mathscr{G}_2$,故有

$$\int_B X\mathrm{d}p = \int_B E(X|\mathscr{G}_2)\mathrm{d}p.$$

性质 1.1.15 (Holder 不等式) 设 $1<p,q<\infty,\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$,则有

$$E[|XY||\mathscr{G}]\leqslant(E[|X|^p|\mathscr{G}])^{1/p}(E[|Y|^q|\mathscr{G}])^{1/q},$$

特别当 $p=q=2$ 时,有 Cauchy-Schwarz 不等式

$$E[|XY||\mathscr{G}]^2\leqslant E(X^2|\mathscr{G})E(Y^2|\mathscr{G}).$$

证明 当 $E[|X|^p|\mathscr{G}]\neq0,E[|Y|^q|\mathscr{G}]\neq0$ 时,在不等式

$$|ab|\leqslant\frac{1}{p}|a|^p+\frac{1}{q}|b|^q$$

中置

$$a = X/E[|X|^p|\mathscr{G}]\neq0,$$
$$b = Y/E[|Y|^q|\mathscr{G}]\neq0,$$

利用条件期望的线性性,单调性和性质 1.1.11,对所得不等式稍加整理,即得所需结果.

为了便于证明下面 Jensen 不等式,我们介绍关于凸函数的一个性质.称函数 $f(x),x\in R$ 为凸函数,如果对于任意 $x,y\in R,0\leqslant\alpha\leqslant1$ 有

$$f(\alpha x+(1-\alpha)y)\leqslant\alpha f(x)+(1-\alpha)f(y), \tag{1.1.15}$$

对任意固定的 $x<y$,令 $z=\alpha x+(1-\alpha)y$,由(1.1.15)得

$$\frac{f(z)-f(x)}{z-x}\leqslant\frac{\alpha f(x)+(1-\alpha)f(y)-f(x)}{y-x} = \frac{f(y)-f(x)}{y-x}.$$

令 $\alpha\uparrow1$(这等价于 $z\downarrow x$)得 $f(x)$的右导数 $f'_+(x)$存在,且满足下面不等式

$$f'_+(x) \leqslant \frac{f(y)-f(x)}{y-x},$$

$$f'_+(x)(y-x) \leqslant f(y)-f(x), \tag{1.1.16}$$

显然当 $y<x$ 时,此不等式仍然成立.

性质 1.1.16 (Jensen 不等式)　设 $f(x), x \in R$ 为凸函数,随机变量 X 是可积的,$\mathscr{G}$ 是 $\mathscr{F}$ 的任意子 σ 域则有

$$f[E(X|\mathscr{G})] \leqslant E[f(X)|\mathscr{G}], \quad a.s.$$

证明　在不等式(1.1.16)中,令 $y=X, x=E(X|\mathscr{G})$ 得

$$f'_+(E(X|\mathscr{G}))(X-E(X|\mathscr{G})) \leqslant f(X)-f(E(X|\mathscr{G}))$$

两边对 $\mathscr{G}$ 求条件期望得

$$f[E(X)|\mathscr{G}] \leqslant E[f(X)|\mathscr{G}], \quad a.s.$$

§1.2　离散参数鞅

1.2.1　停时

定义 1.2.1　定义在可测空间 $(\Omega, \mathscr{F})$ 上取值于 $\{0,1,\cdots,+\infty\}$ 的可测函数 $\tau(\omega)$,称为关于 $\mathscr{F}$ 的子 σ 域流 $\{\mathscr{F}_n: n=0,1,\cdots\}$ 是停时,如果对任意非负整数 n,$(\tau\leqslant n)\in\mathscr{F}_n$,这等价于 $(\tau=n)\in\mathscr{F}_n$.

若 τ_1,τ_2 为停时,根据定义不难验证 $\tau_1+\tau_2$, $\tau_1\vee\tau_2\equiv\max(\tau_1,\tau_2)$, $\tau_1\wedge\tau_2\equiv\min(\tau_1,\tau_2)$ 都是停时.进一步若假设 $\{\tau_n\}$ 为一列停时,容易证明 $\sup\limits_{n\geqslant1}\{\tau_n\}$, $\inf\limits_{n\geqslant1}\{\tau_n\}$, $\limsup\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{n\geqslant1}\{\tau_n\}$, $\lim\limits_{n\to\infty}\inf\limits_{n\geqslant1}\{\tau_n\}$ 都是停时.

定义 1.2.2　设 τ 是 $\{\mathscr{F}_n: n=0,1,\cdots\}$ 停时,令

$$\mathscr{F}_\tau = \{A: A\in\mathscr{F}_\infty, A(\tau\leqslant n)\in\mathscr{F}_n, \forall n\geqslant 0\}, \tag{1.2.1}$$

称 $\mathscr{F}_\tau$ 为 τ 前 σ 域.

其中 $\mathscr{F}_\infty=\sigma(\bigcup_{n=1}^\infty\mathscr{F}_n)$;易知当 $\tau\equiv n$ 时,$\mathscr{F}_\tau=\mathscr{F}_n$.

性质 1.2.3　设 τ,τ_1,τ_2 是 $\{\mathscr{F}_n: n=0,1,\cdots\}$ 停时,则有

(1) τ 为 $\mathscr{F}_\tau$ 可测.

(2) 当 $\tau_1\leqslant\tau_2$ 时,$\mathscr{F}_{\tau_1}\subset\mathscr{F}_{\tau_2}$.

证明　(1)对任意非负整数 m,n,令 $A=(\tau\leqslant m)$,则

$$A(\tau\leqslant n)=(\tau\leqslant n\wedge m)\in\mathscr{F}_{n\wedge m}\subset\mathscr{F}_n \Rightarrow A\in\mathscr{F}_\tau.$$

故 τ 为 $\mathscr{F}_\tau$ 可测.

(2) $\forall A\in\mathscr{F}_{\tau_1}$,由定义知,

$$\forall n\geqslant 0, \quad A(\tau_1\leqslant n)\in\mathscr{F}_n,$$

$$A(\tau_2\leqslant n)=A(\tau_1\leqslant n)(\tau_2\leqslant n)\in\mathscr{F}_n,$$

故 $A \in \mathscr{F}_{\tau_2}, \mathscr{F}_{\tau_1} \subset \mathscr{F}_{\tau_2}$.

性质 1.2.4 设 $\tau_1 \geqslant \tau_2 \geqslant \cdots \geqslant \tau_n \geqslant \cdots$ 是一列 $\{\mathscr{F}_n : n = 0,1,\cdots\}$ 停时，则 $\tau = \inf_{n \geqslant 1}\{\tau_n\}$ 是停时，而且 $\mathscr{F}_\tau = \bigcap_{n \geqslant 1} \mathscr{F}_{\tau_n}$.

证明 由性质 1.2.3 知，对任意正整数 n，$\mathscr{F}_\tau \subset \mathscr{F}_{\tau_n} \Rightarrow \mathscr{F}_\tau \subset \bigcap_{n \geqslant 1} \mathscr{F}_{\tau_n}$，反之任取 $A \in \bigcap_{n \geqslant 1} \mathscr{F}_{\tau_n}$，有

$$A(\tau \leqslant n) = \bigcup_{k \geqslant 1}[A(\tau_k \leqslant n)] \in \mathscr{F}_n \Rightarrow A \in \mathscr{F}_\tau.$$

1.2.2 鞅

定义 1.2.5 称过程 $X = \{X_n : n = 0,1,\cdots\}$ 为 $\{\mathscr{F}_n : n = 0,1,\cdots\}$ 鞅(相应地上鞅，下鞅)，如果

(1) X 是 $\{\mathscr{F}_n : n = 0,1,\cdots\}$ 适应的，即对每个 n，X_n 是 $\mathscr{F}_n$ 可测.

(2) $E(|X_n|) < \infty, n = 0,1,\cdots$.

(3) 对任意非负整数 $m < n$，$E(X_n | \mathscr{F}_m) = X_m$ (相应地 $\leqslant X_m, \geqslant X_m$).

例 1.2.6 假设 $\{Y_n : n = 0,1,\cdots\}$ 是独立的随机变量列，$E(|Y_n|^2) < \infty$，$E(Y_n) = 0$，g_k 是 k 元 Borel 可测函数，$k = 1,2,\cdots$ 令

$$b_k = g_k(Y_0, Y_1, \cdots, Y_{k-1}),$$

$$X_n = X_0 + \sum_{k=1}^{n} b_k Y_k,$$

$\mathscr{F}_n = \sigma(Y_0, Y_1, \cdots, Y_n), n = 1,2,\cdots$. 其中 X_0 为常量，假定 $E(|b_k|^2) < \infty$，$k = 1,2,\cdots$，则 $\{X_n, \mathscr{F}_n, n = 0,1,\cdots\}$ 是鞅.

事实上，显然对任意 $n = 1,2,\cdots$，$E(|X_n|) < \infty$；又因为

$$\begin{aligned} X_{n+1} &= X_n + b_{n+1} Y_{n+1}, \\ E(X_{n+1} | \mathscr{F}_n) &= E(X_n | \mathscr{F}_n) + E(b_{n+1} Y_{n+1} | \mathscr{F}_n) \\ &= X_n + b_{n+1} E(Y_{n+1} | \mathscr{F}_n) \\ &= X_n + b_{n+1} E Y_{n+1} = X_n. \end{aligned}$$

定理 1.2.7 假设 $\{X_n, \mathscr{F}_n, n = 0,1,\cdots\}$ 和 $\{Y_n, \mathscr{F}_n, n = 0,1,\cdots\}$ 是鞅(或下鞅)，则

(1) $\{X_n + Y_n, \mathscr{F}_n, n = 0,1,\cdots\}$ 是鞅(或下鞅).

(2) $\{X_n \vee Y_n, \mathscr{F}_n, n = 0,1,\cdots\}$ 是下鞅.

证明 (1) $X_n + Y_n$ 的适应性和可积性是显然的，只需验证定义 1.2.5 中的条件(3)，对任意非负整数 $m < n$，

$$\begin{aligned} E(X_n + Y_n | \mathscr{F}_m) &= E(X_n | \mathscr{F}_m) + E(Y_n | \mathscr{F}_m) \\ &= X_m + Y_m \quad (\text{相应地} \geqslant X_m + Y_m). \end{aligned}$$

(2)因为 $X_n \vee Y_n \geqslant X_n, X_n \vee Y_n \geqslant Y_n$,故有

$$E(X_n \vee Y_n | \mathscr{F}_m) \geqslant E(X_n | \mathscr{F}_m) \vee E(Y_n | \mathscr{F}_m) \geqslant X_m \vee Y_m.$$

由定理 1.2.7(2)知,如果 $\{X_n, \mathscr{F}_n, n=0,1,\cdots\}$ 和 $\{Y_n, \mathscr{F}_n, n=0,1,\cdots\}$ 是上鞅,则 $\{X_n \wedge Y_n, \mathscr{F}_n, n=0,1,\cdots\}$ 也是上鞅.

定理 1.2.8　(1)假设 $\{X_n, \mathscr{F}_n, n=0,1,\cdots\}$ 是鞅,f 是定义在 R_1 上的凸函数.如果,$\forall\, n \geqslant 0; E|f(X_n)| < \infty$,则 $\{f(X_n), \mathscr{F}_n, n=0,1,\cdots\}$ 是下鞅.

(2)假设 $\{X_n, \mathscr{F}_n, n=0,1,\cdots\}$ 是下鞅(上鞅),f 是定义在 R_1 上的非降凸函数.如果,$\forall\, n \geqslant 0, E|f(X_n)| < \infty$,则 $\{f(X_n),_n, \mathscr{F}_n, n=0,1,\cdots\}$ 是下鞅(上鞅).

(3)假设 $\{X_n, \mathscr{F}_n, n=0,1,\cdots\}$ 是上鞅,f 是定义在 R_1 上的非降凹函数.如果,$\forall\, n \geqslant 0, E|f(X_n)| < \infty$,则 $\{f(X_n), \mathscr{F}_n, n=0,1,\cdots\}$ 是上鞅.

证明　我们只证明(2),其余的证明是类似的.对任意非负整数 $m < n$,因为函数 f 是非降的,而且 $E(X_n | \mathscr{F}_m) \geqslant X_m$,所以 $f(E(X_n | \mathscr{F}_m)) \geqslant f(X_m)$,由 Jensen 不等式有

$$E(f(X_n) | \mathscr{F}_m) \geqslant f(E(X_n | \mathscr{F}_m)) \geqslant f(X_m).$$

推论 1.2.9　假设 $\{X_n, \mathscr{F}_n, n=0,1,\cdots\}$ 是鞅(或非负下鞅),$\lambda \geqslant 1$ 为一常数.如果对 $n \geqslant 0$, $|X_n|^\lambda$ 是可积的.则 $\{|X_n|^\lambda, \mathscr{F}_n, n \geqslant 0\}$ 是下鞅.

推论 1.2.10　假设 $\{X_n, \mathscr{F}_n, n=0,1,\cdots\}$ 是下鞅,则 $\{X_n^+, \mathscr{F}_n, n=0,1,\cdots\}$ 也是下鞅.

1.2.3　离散鞅的基本不等式

设 $\{X_n, \mathscr{F}_n, n=0,1,\cdots\}$ 是鞅(或下鞅),则对于 $n \geqslant m$ 有 $E(X_n | \mathscr{F}_m) = X_m$(或 $\geqslant X_m$),如果将 n, m 换成停时后,上面式子是否仍然成立?下面的定理指出,当停时有界时,回答是肯定的.

定理 1.2.11 (Doob 有界停时定理)　设 $\{X_n, \mathscr{F}_n, n=0,1,\cdots\}$ 是下鞅,$\sigma \leqslant \tau$ 是一对有界停时,则有

(1) $E|X_\sigma| < \infty, E|X_\tau| < \infty$.

(2) $E(X_\tau | \mathscr{F}_\sigma) \geqslant X_\sigma$.　　(1.2.2)

如果 $\{X_n, \mathscr{F}_n, n=0,1,\cdots\}$ 是鞅,则(1.2.2)中不等号改为等号.

证明　设 $\tau \leqslant N$,则有 $|X_\tau| \leqslant \sum_{i=0}^{N} |X_i| \in L^1$,同理 $|X_\sigma| \in L^1$.设 $A \in \mathscr{F}_\sigma$,则有

$$A(\sigma = j)(\tau > j) \in \mathscr{F}_j. \tag{1.2.3}$$

如果 $\tau - \sigma \leqslant 1$,那么由下鞅性及(1.2.3),对 $A \in \mathscr{F}_\sigma$ 有

$$\int_A (X_\sigma - X_\tau)\mathrm{d}P = \sum_{j=0}^{N}\int_{A\cap(\sigma=j)(\tau>j)}(X_j - X_{j+1})\mathrm{d}P \leqslant 0, \quad (1.2.4)$$

对一般情况,令 $\alpha_j = \tau \wedge (\sigma + j), j = 1,2,\cdots,N$,则 α_j 是停时,且

$$\sigma \leqslant \alpha_1 \leqslant \cdots \leqslant \alpha_N = \tau, \quad \alpha_1 - \sigma \leqslant 1, \quad \alpha_j - \alpha_{j+1} \leqslant 1,$$
$$j = 1,2,\cdots,N. \quad (1.2.5)$$

于是对任意 $A \in \mathscr{F}_\sigma$,有 $A \in \mathscr{F}_{\alpha_j}, 1 \leqslant j \leqslant N$,从而

$$\int_A X_\sigma \mathrm{d}P \leqslant \int_A X_{\alpha_1}\mathrm{d}P \leqslant \cdots \leqslant \int_A X_\tau \mathrm{d}P,$$

又因为 X_σ 是 $\mathscr{F}_\sigma$ 可测,故(1.2.2)成立.

推论 1.2.12 设$\{X_n, \mathscr{F}_n, n = 0,1,\cdots\}$是下鞅(鞅),$\sigma,\tau$ 是一对有界停时,则有

$$E(X_\tau | \mathscr{F}_\sigma) \geqslant X_{\sigma\wedge\tau} \quad (= X_{\sigma\wedge\tau}).$$

证明 因为

$$X_\sigma = X_\sigma I_{\sigma\geqslant\tau} + X_\sigma I_{\sigma<\tau}$$
$$= X_\sigma I_{\sigma\geqslant\tau} + X_{\sigma\wedge\tau} I_{\sigma>\tau},$$
$$(\sigma < \tau) \in \mathscr{F}_{\sigma\wedge\tau} \subset \mathscr{F}_\tau,$$

故有

$$E(X_{\sigma\wedge\tau} I_{\sigma<\tau} | \mathscr{F}\tau) = X_{\sigma\wedge\tau} I_{\sigma<\tau},$$
$$E(X_\sigma I_{\sigma\geqslant\tau} | \mathscr{F}_\tau) = I_{\sigma\geqslant\tau} E(X_\sigma | \mathscr{F}_{\sigma\wedge\tau}) \geqslant I_{\sigma\geqslant\tau} X_{\sigma\wedge\tau},$$
$$E(X_\sigma | \mathscr{F}_\tau) \geqslant I_{\sigma\geqslant\tau} X_{\tau\wedge\tau} + I_{\sigma<\tau} X_{\sigma\wedge\tau} = X_{\sigma\wedge\tau}.$$

定理 1.2.13 设$\{X_n, \mathscr{F}_n, n = 0,1,\cdots\}$是下鞅,则 $\forall \lambda > 0, n \geqslant 0$,有

(1) $\lambda P\{\max\limits_{k\leqslant n} X_k \geqslant \lambda\} \leqslant \int_{\{\max\limits_{k\leqslant n} X_k \geqslant \lambda\}} X_n \mathrm{d}P \leqslant E|X_n|$.

(2) $\lambda P\{\min\limits_{k\leqslant n} X_k \leqslant -\lambda\} \leqslant -EX_0 + \int_{\{\min\limits_{k\leqslant n} X_k > -\lambda\}} X_n \mathrm{d}P \leqslant EX_n^+ - EX_0 \leqslant E|X_0| + E|X_n|$.

(3) $\lambda P\{\max\limits_{k\leqslant n}|X_k| \geqslant \lambda\} \leqslant 2EX_n^+ - EX_0 \leqslant E|X_0| + 2E|X_n|$.

证明 (1)令

$$\tau = \begin{cases} \min\{k: k \leqslant n, x_k \geqslant \lambda\}, \\ n, \qquad \text{如果上面集合是空集}, \end{cases}$$

则 τ 是停时,而且 $\tau \leqslant n$,记 $M = \{\max\limits_{k\leqslant n} X_k \geqslant \lambda\}$,则在 M 上,$x_\tau \geqslant \lambda$,而且 $M \in \mathscr{F}_\tau$,实际上 $\forall j \leqslant n, M \cap (\tau = j) = (X_k < \lambda, 0 \leqslant k \leqslant j-1, X_j \geqslant \lambda) \in \mathscr{F}_j$. 因此对 τ, n 应用 Doob 有界停时定理得

$$\lambda P(M) \leqslant \int_M X_\tau \mathrm{d}P \leqslant \int_M X_n \mathrm{d}P,$$

(1)的第一个不等式得证;(1)的第二,三个不等式是显然的.

(2)类似地令

$$\tau = \begin{cases} \min\{k : k \leqslant n, X_k \leqslant -\lambda\}, \\ n, \qquad \text{如果上面集合是空集}, \end{cases}$$

记 $M = \{\min\limits_{k\leqslant n} X_k \leqslant -\lambda\}$,因为 $\tau \leqslant n$,对 $0,\tau$ 应用 Doob 有界停时定理得

$$EX_0 \leqslant EX_\tau = \int_M X_\tau \mathrm{d}P + \int_{M^c} X_\tau \mathrm{d}P \leqslant -\lambda P(M) + \int_{M^c} X_\tau \mathrm{d}P.$$

即(2)的第一个不等式成立,(2)的第二,三个不等式是显然的.

推论 1.2.14　设 $\{X_n, \mathscr{F}_n, n=0,1,\cdots\}$ 是鞅,且 $E|X_n|^p < \infty, p \geqslant 1, n \geqslant 0$,则 $\forall\, n \geqslant 1$,

$$P\{\max_{k\leqslant n} |X_k| \geqslant \lambda\} \leqslant E|X_n|^p / \lambda^p.$$

证明　由 $\{X_n, \mathscr{F}_n, n=0,1,\cdots\}$ 是鞅知 $\{|X_n|^p\}$ 是下鞅,由定理 1.2.13(1)得

$$\lambda^p P\{\max_{k\leqslant n} |X_k|^p \geqslant \lambda^p\} \leqslant E|X_n|^p,$$

$$P\{\max_{k\leqslant n} |X_k| \geqslant \lambda\} = P\{\max_{k\leqslant n} |X_k|^p \geqslant \lambda^p\} \leqslant E|X_n|^p / \lambda^p.$$

定理 1.2.15　设 $\{X_n, \mathscr{F}_n, n=0,1,\cdots\}$ 是非负下鞅,$p>1$,则

$$E\{\max_{k\leqslant n} X_k^P\} \leqslant \left(\frac{p}{p-1}\right)^p E|X_n|^p. \tag{1.2.6}$$

证明　令 $Y = \max\limits_{k\leqslant n} X_k$,由定理 1.2.13(1)知

$$\lambda p(Y \geqslant \lambda) \leqslant \int_\Omega I_{Y\geqslant\lambda} X_n \mathrm{d}p, \tag{1.2.7}$$

由(1.2.7)及 Fubini 定理得

$$\begin{aligned} EY^p &= \int_\Omega \mathrm{d}p \int_0^Y p\lambda^{p-1} \mathrm{d}\lambda = \int_\Omega \mathrm{d}p \int_0^\infty I_{(Y\geqslant\lambda)} p\lambda^{p-1} \mathrm{d}\lambda \\ &= p\int_0^\infty \lambda^{p-1} p(Y \geqslant \lambda) \mathrm{d}\lambda \leqslant p\int_0^\infty \lambda^{p-1} \left(\frac{1}{\lambda}\int_{(Y\geqslant\lambda)} X_n \mathrm{d}p\right) \mathrm{d}\lambda \\ &= \int_\Omega X_n \left(\int_0^Y p\lambda^{p-1} \mathrm{d}\lambda\right) \mathrm{d}p = \frac{p}{p-1} E(X_n Y^{p-1}), \end{aligned} \tag{1.2.8}$$

再由(1.2.8)及 Holder 不等式得

$$EY^p \leqslant q \| X_n \|_p [EY^{(p-1)q}]^{1/p} = q \| X_n \|_p \| Y \|_p^{p/q},$$

如果 $EY^p \neq 0$,两边除以 $\| Y \|_p^{p/q}$ 得 $\| Y \|_p \leqslant q \| X_n \|_p$,(1.2.6)得证:如果 $EY^p = 0$,则 $EX_n^p = 0$,(1.2.6)仍成立.

推论 1.2.16 (Doob 不等式) 设$\{X_n,\mathscr{F}_n,n=0,1,\cdots\}$是非负下鞅，$p>1$，则

$$[E\{\sup_{k\geqslant 0}X_k\}^p]^{1/p}\leqslant q\sup_{n\geqslant 0}\|X_n\|_p. \tag{1.2.9}$$

证明 由(1.2.6)得

$$[E\{\max_{k\leqslant n}X_k^p\}]^{1/p}\leqslant q\|X_n\|_p\leqslant q\sup_{n\geqslant 0}\|X_n\|_p,$$

令 $n\to\infty$得(1.2.9).

下面证明关于半鞅的上穿不等式，先介绍上穿概念. 给定闭区间$[a,b]$及M个数$x_1,x_2,\cdots,x_M$，如果从x_1起顺次到x_M，自$[a,b]$的左方到其右方共v次，就说数列$x_1,x_2,\cdots,x_M$上穿$[a,b]v$次，确切的定义如下，令

$$\tau_1=\begin{cases}\min\{n:0\leqslant n\leqslant M,x_n\leqslant a\},\\ M+1, \qquad \text{如果上面集合是空集},\end{cases}$$

$$\sigma_1=\begin{cases}\min\{n:\tau_1\leqslant n\leqslant M,x_n\geqslant b\},\\ M+1, \qquad \text{如果上面集合是空集},\end{cases}$$

$$\tau_k=\begin{cases}\min\{n:\sigma_{k-1}\leqslant n\leqslant M,x_n\leqslant a\},\\ M+1, \qquad \text{如果上面集合是空集},\end{cases}$$

$$\sigma_k=\begin{cases}\min\{n:\tau_k\leqslant n\leqslant M,x_n\geqslant b\},\\ M+1, \qquad \text{如果上面集合是空集},\end{cases} \qquad k=1,2,\cdots.$$

定义 1.2.17 使$\sigma_k\leqslant M$的最大的k称为数列$x_1,x_2,\cdots,x_M$上穿$[a,b]$的次数，记为ν_a^b(如果$\sigma_1=M+1$，则$\nu_a^b=0$).

定理 1.2.18 (上穿不等式) 设$\{X_n,\mathscr{F}_n,n=0,1,\cdots\}$是下鞅，$\nu_a^b$是它上穿$[a,b]$的次数，则有

$$E(\nu_a^b)\leqslant\frac{1}{b-a}[E(X_M-a)^+-E(X_0-a)^+]\leqslant\frac{1}{b-a}[EX_M^++|a|]. \tag{1.2.10}$$

证明 令$Y_n=(X_n-a)^+,n=0,1,\cdots,M$，由推论 1.2.10 知$\{Y_n\}$是下鞅，显然$\{Y_n\}$非负. 而且$\{Y_n\}$上穿$[0,b-a]$的次数等于$\nu_a^b$. 在$\tau_k,\sigma_k$的定义中将$a,b,X_n$分别换成$0,b-a,Y_n$，并补充定义$\sigma_0=0,\tau_{M+1}=M+1,Y_{M+1}=Y_M$，则有

$$Y_M-Y_0=\sum_{k=1}^{M}(Y_{\sigma_k}-Y_{\tau_k})+\sum_{k=1}^{M+1}(Y_{\tau_k}-Y_{\sigma_{k-1}}), \tag{1.2.11}$$

如果$\nu_a^b=r>0$，则有$Y_{\sigma_k}-Y_{\tau_k}\geqslant b-a,k=1,\cdots,r$，由于当$k>r$时，$Y_{\sigma_k}-Y_{\tau_k}\geqslant 0$，故

$$\sum_{k=1}^{M}(Y_{\sigma_k}-Y_{\tau_k})\geqslant(b-a)r=(b-a)\nu_a^b,$$

当 $r=0$ 时,上面式子仍然成立,于是有

$$E\left[\sum_{k=1}^{M}(Y_{\sigma_k}-Y_{\tau_k})\right]\geqslant(b-a)E\nu_a^b, \tag{1.2.12}$$

其次由于 τ_k,σ_{k-1} 都是有界停时,而且 $\tau_k\geqslant\sigma_{k-1}$,由定理 1.2.11 得 $EY_{\tau_k}\geqslant EY_{\sigma_{k-1}}$,从而

$$E\left[\sum_{k=1}^{M+1}(Y_{\tau_k}-Y_{\sigma_{k-1}})\right]=\sum_{k=1}^{M+1}(EY_{\tau_k}-EY_{\sigma_{k-1}})\geqslant 0, \tag{1.2.13}$$

由(1.2.11),(1.2.12),(1.2.13)得 $EY_M-EY_0\geqslant(b-a)E\nu_a^b$,即

$$E\nu_a^b\leqslant\frac{1}{b-a}[E(X_M-a)^+-E(X_0-a)^+].$$

1.2.4 离散鞅的收敛定理

定理 1.2.19 设 $\{X_n,\mathscr{F}_n,n=0,1,\cdots,M\}$ 是下鞅,满足

$$\sup_{n\geqslant 0}E|X_n|<\infty, \tag{1.2.14}$$

则存在 $\mathscr{F}_\infty$ 可测的随机变量 X_∞,使 $E|X_\infty|<\infty$,而且

$$p(\lim_{n\to\infty}X_n=X_\infty)=1, \tag{1.2.15}$$

其中 $\mathscr{F}_\infty=\sigma(\bigcup_{n=0}^{\infty}\mathscr{F}_n)$.

证明 令

$$A=\{\omega:\limsup_{n\to\infty}X_n(\omega)>\liminf_{n\to\infty}X_n(\omega)\},$$

$$A(a,b)=\{\omega:\liminf_{n\to\infty}X_n(\omega)<a<b<\limsup_{n\to\infty}X_n(\omega)\},$$

则有 $A,A(a,b)\in\mathscr{F}_\infty$,而且

$$A=\bigcup_{a<b,a,b\in Q}A(a,b), \tag{1.2.16}$$

其中 Q 为全体有理数.下面证明 $P(A)=0$,令 $\nu_a^b(M)$ 表示数列 $X_0,X_1,\cdots,X_M$ 上穿 $[a,b]$ 的次数,ν_a^b 表示数列 $X_0,X_1,\cdots$ 上穿 $[a,b]$ 的次数.显然 $\nu_a^b(M)$ 关于 M 不减,而且有 $\nu_a^b=\lim_{M\to\infty}\nu_a^b(M)$,由上穿不等式得

$$\begin{aligned}E\nu_a^b(M)&\leqslant\frac{1}{b-a}[EX_M^++|a|]\\&\leqslant\frac{1}{b-a}[\sup_{M\geqslant 0}E|X_M|+|a|],\end{aligned} \tag{1.2.17}$$

由(1.2.14)和(1.2.17)知 $E\nu_a^b<\infty$,从而

$$p(\nu_a^b<\infty)=1, \tag{1.2.18}$$

由于 $A(a,b)\subset\{\omega:\nu_a^b(\omega)=+\infty\}$,再由(1.2.18)知 $p\{A(a,b)\}=0$,从而 $p(A)=0$,即 $\lim_{n\to\infty}X_n$ 几乎处处存在.令 $X_\infty=\liminf_{n\to\infty}X_n$,则 X_∞ 是 $\mathscr{F}_\infty$ 可测,而

且 $X_\infty = \lim\limits_{n\to\infty} X_n, a.s.$,再用 Fatou 引理,和(1.2.15)式,得

$$E|X_\infty| \leqslant \liminf_{n\to\infty} E|X_n| \leqslant \sup_{n\geqslant 0} E|X_n| < \infty.$$

注 1.2.20 由于 $E|X_n| = 2EX_n^+ - EX_n \leqslant 2EX_n^+ - EX_1$,可见对于下鞅条件(1.2.14)等价于形式上较弱的条件 $\sup\limits_{n\geqslant 0} EX_n^+ < \infty$,对于上鞅,由于

$$E|X_n| = 2EX_n^- + EX_n \leqslant 2EX_n^- + EX_1,$$

故(1.2.14)等价于条件 $\sup\limits_{n\geqslant 0} EX_n^- < \infty$.

1.2.5 Doob 停时定理

定义 1.2.21 称鞅(或下鞅)$\{X_n, \mathscr{F}_n, n=0,1,\cdots,\}$ 是右闭的,如果存在 $\mathscr{F}_\infty$ 可测,且可积的随机变量 X_∞,使得对任意 $n\geqslant 0$ 有

$$E(X_\infty|\mathscr{F}_n) = X_n (\text{或} \leqslant X_n), \tag{1.2.19}$$

显然鞅(或下鞅)$\{X_n, \mathscr{F}_n, n=0,1,\cdots\}$ 是右闭的充分必要条件是存在可积的 Y,对任意 $n\geqslant 0$ 有

$$E(Y|\mathscr{F}_n) = X_n (\text{或} \geqslant X_n),$$

实际上,只需令 $X_\infty = E(Y|\mathscr{F}_\infty)$,那么 X_∞ 满足右闭定义的要求.

下面证明离散参数时的 Doob 停时定理.

定理 1.2.22 设 $\{X_n, \mathscr{F}_n, n=0,1,\cdots,M\}$ 是右闭鞅(或下鞅),停时 $\sigma\leqslant\tau$,则有

(1) X_σ, X_τ 都可积,且 $E(X_\infty|\mathscr{F}_\tau) = X_\tau$(或 $\geqslant X_\tau$).

(2) $E(X_\tau|\mathscr{F}_\sigma) = X_\sigma$(或 $\geqslant X_\sigma$).

证明 对任意 Borel 集 Γ 及 $n\geqslant 0$ 有

$$(X_\tau \in \Gamma)(\tau\leqslant n) = \bigcup_{k=0}^{n} (X_k\in\Gamma)(\tau = k) \in \mathscr{F}_n,$$

故 $X_\tau \in \mathscr{F}_\tau$,同理 $X_\sigma \in \mathscr{F}_\sigma$

(一)设 $\{X_n, \mathscr{F}_n, n=0,1,\cdots,M\}$ 是右闭鞅,由(1)及条件期望的性质,有

$$\begin{aligned}\int_\Omega |X_\tau| \mathrm{d}p &= \sum_{n=0}^{\infty}\int_{(\tau=n)} |X_n| \mathrm{d}p \\ &\leqslant \sum_{n=0}^{\infty}\int_{(\tau=n)} |X_\infty| \mathrm{d}p = E|X_\infty| < \infty, \end{aligned} \tag{1.2.20}$$

从而 X_τ 可积,同理 X_σ 可积.对任意 $A\in\mathscr{F}_\tau$,由(1.2.19)得

$$\begin{aligned}\int_A |X_\tau| \mathrm{d}p &= \sum_{n=0}^{\infty}\int_{A(\tau=n)} |X_n| \mathrm{d}p \\ &\leqslant \sum_{n=0}^{\infty}\int_{A(\tau=n)} |X_\infty| \mathrm{d}p = \int_A X_\infty \mathrm{d}p, \end{aligned} \tag{1.2.21}$$

即 $E(X_\infty|\mathscr{F}_\tau)=X_\tau$,同理 $E(X_\infty|\mathscr{F}_\sigma)=X_\sigma$,故(1)成立.再来证明(2),由(1)及 $\mathscr{F}_\sigma\subset\mathscr{F}_\tau$ 可得

$$E(X_\tau|\mathscr{F}_\sigma)=E(E(X_\infty|\mathscr{F}_\sigma))=E(X_\infty|\mathscr{F}_\sigma)=X_\sigma.$$

(二)设 $\{X_n,\mathscr{F}_n,n=0,1,\cdots,M\}$ 是右闭下鞅

先将 X_n 分解为

$$X_n=E(X_\infty|\mathscr{F}_n)-Y_n,\qquad 0\leqslant n\leqslant\infty,\tag{1.2.22}$$

其中

$$Y_n=E(X_\infty|\mathscr{F}_n)-X_n,$$

易知 $\{Y_n,\mathscr{F}_n,n=0,1,\cdots\}$ 是非负上鞅而且

$$Y_\infty=E(X_\infty|\mathscr{F}_\infty)-X_\infty=0,$$

因为 Y_n 非负,所以 $E(0|\mathscr{F}_n)=0\leqslant Y_n,n=0,1,\cdots$,这表明 $\{Y_n\}$ 是右闭的.记

$$\pi_n=E(X_\infty|\mathscr{F}_n),\qquad n=0,1,\cdots,$$

则 $\{\pi_n,\mathscr{F}_n,n=0,1,\cdots\}$ 是右闭鞅,根据(一)的结果,$\{\pi_n\}$ 满足(1)和(2),因此只需证明 $\{Y_n,\mathscr{F}_n,n=0,1,\cdots\}$ 满足相应的(1)和(2).因为 $Y_\infty=0,a.s.$,故有

$$Y_\tau=Y_\tau I_{(\tau<\infty)},\quad a.s.$$

$$EY_\tau=E\lim_{n\to\infty}Y_{\tau\wedge n}I_{(\tau<n)}\leqslant E\lim_{n\to\infty}Y_{\tau\wedge n},\tag{1.2.23}$$

由Fatou引理得 $EY_\tau\leqslant\liminf_{n\to\infty}EY_{\tau\wedge n}$,因为0和 $\tau\wedge n$ 是有界停时,由定理1.2.12知(1.2.23)的右方不大于 EY_0,从而 $0\leqslant EY_\tau<\infty$,显然 $0=E(Y_\infty|\mathscr{F}_\tau)\leqslant Y_\tau$,故(1)成立.现来证明(2),令 $\tau_k=\tau\wedge k,\sigma_k=\sigma\wedge k,k=0,1,\cdots$.则 τ_k,σ_k 都是有界停时,且 $\tau_k\leqslant\sigma_k$,任取 $A\in\mathscr{F}_\sigma$,由于 $A(\sigma\leqslant k)\in\mathscr{F}_{\sigma_k}$,由定理1.2.21得

$$\int_{A(\sigma\leqslant k)}Y_{\tau_k}\mathrm{d}p\leqslant\int_{A(\sigma\leqslant k)}Y_{\sigma_k}\mathrm{d}p,\tag{1.2.24}$$

但是 $(\tau\leqslant k)\subset(\sigma\leqslant k)$,又因为 $Y_n\geqslant0,a.s.$ 故有

$$\int_{A(\tau\leqslant k)}Y_{\tau_k}\mathrm{d}p\leqslant\int_{A(\sigma\leqslant k)}Y_{\sigma_k}\mathrm{d}p,\tag{1.2.25}$$

注意在 $(\tau\leqslant k)$ 上 $\tau=\tau_k$,在 $(\sigma\leqslant k)$ 上 $\sigma=\sigma_k$,于是由(1.2.25)得

$$\int_{A(\tau\leqslant k)}Y_\tau\mathrm{d}p\leqslant\int_{A(\sigma\leqslant k)}Y_\sigma\mathrm{d}p,$$

令 $k\to\infty$ 得

$$\int_{A(\tau<\infty)}Y_\tau\mathrm{d}p\leqslant\int_{A(\sigma<\infty)}Y_\sigma\mathrm{d}p,\tag{1.2.26}$$

注意到 $Y_\infty=0,a.s.$,由(1.2.26)得

$$\int_A Y_\tau\mathrm{d}p\leqslant\int_A Y_\sigma\mathrm{d}p,$$

即 $Y_\sigma \geqslant E(Y_\tau | \mathscr{F}_\sigma)$，于是由(2.6.4)得

$$E(X_\tau | \mathscr{F}_\sigma) = E(\pi_\tau | \mathscr{F}_\sigma) - E(Y_\tau | \mathscr{F}_\sigma) \geqslant \pi_\sigma - Y_\sigma = X_\sigma.$$

§1.3 马尔可夫链

本节介绍离散时间参数马尔可夫链(Markov chain)的基本理论.

1.3.1 马尔可夫链的定义及其转移概率

定义 1.3.1 称随机序列 $\{X_n : n = 0, 1, \cdots\}$ 为离散参数马尔可夫链，如果它满足

(1) $\{X_n : n = 0, 1, \cdots\}$ 的状态空间 E 为至多可数集.

(2) 对任意非负整数 n 及状态 $i_0, i_1, \cdots, i_{n+1}$ 有

$$p(X_{n+1} = i_{n+1} | X_0 = i_0, \cdots, X_n = i_n) = p(X_{n+1} = i_{n+1} | X_n = i_n), \tag{1.3.1}$$

如果对任意非负整数 m, n 及任意状态 i 和 j 有

$$p(X_{n+1} = j | X_n = i) = p(X_{m+1} = j | X_m = i), \tag{1.3.2}$$

则称马氏链 $\{X_n : n = 0, 1, \cdots\}$ 是齐次的. 在齐次情形，记 $p_{ij} = p(X_{n+1} = j | X_n = i)$，称 p_{ij} 为 $\{X_n : n = 0, 1, \cdots\}$ 的转移概率，以 $p_{ij}, i, j \in E$ 为元素形成的矩阵 $\boldsymbol{P} = (p_{ij})_{i,j \in E}$ 称为 $\{X_n : n = 0, 1, \cdots\}$ 的转移矩阵，本节只介绍齐次马氏链.

例 1.3.2 简单随机游动，假设 $X_0 = a$，a 是常数，$Z_1, Z_2, \cdots$ 是独立同分布的随机变量列，而且 $P(Z_n = 1) = p$，$P(Z_n = 0) = r$，$P(Z_n = -1) = q$，$p + q + r = 1$，令 $X_n = \sum\limits_{k=0}^{n} Z_k$，则 $\{X_n : n = 0, 1, \cdots\}$ 为齐次马氏链. 其状态空间 $E = \{a \pm n, n = 0, 1, \cdots\}$，转移概率为 $p_{i,j+1} = p$，$p_{i,j-1} = q$，$p_{i,j} = r$，其余的 $p_{ij} = 0$，此马氏链称为简单随机游动. 当 $p + q = 1/2$ 时，就称 $\{X_n : n = 0, 1, \cdots\}$ 为对称随机游动.

例 1.3.3 带吸收壁的随机游动. 假设简单随机游动 $\{X_n : n = 0, 1, \cdots\}$ 的状态空间为 $\{0, 1, \cdots, b\}$，如果质点移动到状态 0 或 b 后就永远停留在该状态，即 $p_{0,0} = p_{b,b} = 1$，其余的 $p_{ij} = 0$，就称 $\{X_n : n = 0, 1, \cdots\}$ 为带吸收壁 0 和 b 的随机游动.

例 1.3.4 如果例 1.3.3 中的质点移动到状态 0 或 b 后，下一次移动必返回，即 $p_{0,1} = p_{b,b-1} = 1$，就称 $\{X_n : n = 0, 1, \cdots\}$ 为带反射壁 0 和 b 的随机游动.

定理 1.3.5　齐次马氏链的联合分布由初始分布 $p(x_0=i)=p_i, i\in E$ 及一步转移概率矩阵 $\boldsymbol{P}=(p_{ij})$ 完全确定.

证明　对任意 $n=0,1,\cdots$ 和任意状态 $i_0,i_1,\cdots,i_n\in E$，由马氏链的定义有

$$\begin{aligned} & p(X_0=i_0,X_1=i_1,\cdots,X_n=i_n) \\ = & p(X_0=i_0)p(X_1=i_1|X_0=i_0)p(X_2=i_2|X_0=i_0,X_1=i_1) \\ & \cdots p(X_n=i_n|X_0=i_0,X_1=i_1,\cdots,X_{n-1}=i_{n-1}) \\ = & p_{i_0}p_{i_0,i_1}p_{i_1,i_2}\cdots p_{i_{n-1},i_{n-1}}, \end{aligned} \tag{1.3.3}$$

从而$\{X_n:n=0,1,\cdots\}$的任意有限维分布由初始分布及一步转移概率矩阵 $\boldsymbol{P}$ 完全确定，再由 Kolmogorov 扩张定理知定理 1.3.6 的结论成立.

定理 1.3.6　对于齐次马氏链及任意 $m,n=0,1,\cdots$ 任意 $i,j\in E$ 有

$$P_{ij}^{(n+m)}=\sum_{k\in E}P_{ik}^{(n)}P_{kj}^{(m)},$$

其中

$$P_{ij}^{n+m}=p(X_{n+m}=j|X_0=i).$$

证明

$$\begin{aligned} P_{ij}^{(n+m)} &= p(X_{n+m}=j|X_0=i) \\ &= \sum_{k\in E}p(X_n=k,X_{n+m}=j|X_0=i) \\ &= \sum_{k\in E}p(X_n=k|X_0=i)p(X_{n+m}=j|X_0=i,X_n=k) \\ &= \sum_{k\in E}P_{ik}^{(n)}P_{kj}^{(m)}, \end{aligned} \tag{1.3.4}$$

(1.3.4)式称为 Chapman-Kolmogorov 方程.

1.3.2　状态的分类

定义 1.3.7　如果集合$\{n:n\geqslant1,P_{ij}^{(n)}>0\}$不空，该数集的最大公约数 $d=d(i)$称为状态 i 的周期；如果 $d>1$，称 i 为周期的状态；如果 $d=1$，称 i 为非周期的.

现在我们引入常返性概念，记

$$f_{ij}^{(n)}=P(X_{m+\nu}\neq j,1\leqslant\nu\leqslant n-1,X_{n+m}=j|X_m=i),\quad n\geqslant1, \tag{1.3.5}$$

$$f_{ij}^{(0)}=0,$$

易知，上式右方等于

$$\sum_{S_k\neq j,1\leqslant k\leqslant n-1}p_{i,S_1}p_{S_1,S_2}\cdots p_{S_{n-1},j}, \tag{1.3.6}$$

与 m 无关,它表示质点由 i 出发,经 n 步首次到达 j 的概率. 记 $f_{ij}=\sum_{n=1}^{\infty}f_{ij}^{(n)}$,它表示质点由 i 出发,经有限步终于到达 j 的概率.

定义 1.3.8 如果 $f_{ij}=1$,称状态 i 为常返的;如果 $f_{ij}<1$,称状态 i 为非常返的.

对常返状态 i,$\{f_{ii}^{(n)},n=1,2,\cdots\}$形成一概率分布,此分布的期望值 $\mu_i=\sum_{n=1}^{\infty}nf_{ii}^{(n)}$,表示质点由 i 出发再返回到 i 的平均回转时间,于是可将状态 i 细分如下.

定义 1.3.9 称常返状态 i 为正常返的,如果 $\mu_i<\infty$. 称常返状态 i 为零常返的,如果 $\mu_i=\infty$. 非周期的正常返状态称为遍历状态.

$f_{ij}^{(n)}$与 $p_{ij}^{(n)}$有如下关系.

定理 1.3.10 对任意状态 i,j 及 $n=1,2,\cdots$,有

$$p_{ij}^{(n)}=\sum_{k=1}^{n}f_{ij}^{(k)}p_{jj}^{(n-k)}=\sum_{k=0}^{n-1}p_{ij}^{(k)}f_{jj}^{(n-k)}. \tag{1.3.7}$$

证明

$$\begin{aligned}p_{ij}^{(n)}&=p(X_n=j\mid X_0=i)\\&=\sum_{k=1}^{n}p(X_v\neq j,1\leqslant v\leqslant k-1,X_k=j,X_n=j\mid X_0=i)\\&=\sum_{k=1}^{n}p(X_v\neq j,1\leqslant v\leqslant k-1,X_k=j\mid X_0=i),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&p(X_n=j\mid X_0=i,X_v\neq j,1\leqslant v\leqslant k-1,X_k=j)\\&=\sum_{k=1}^{n}f_{ij}^{(k)}p_{jj}^{(n-k)}.\end{aligned}$$

类似地可以证明第二个等式.

下面研究常返性的判别及其性质. 假设 $a_0,a_1,a_2,\cdots$为一实数列,我们称幂级数 $A(s)=\sum_{n=0}^{\infty}a_ns^n$ 为数列$\{a_n\}$的母函数. 易知,如果$\{a_n\}$有界,则 $A(s)$对一切$|s|<1$收敛. 假设$\{a_n\}$与$\{b_n\}$的母函数分别为 $A(s)$与 $B(s)$且对一切$|s|<1$收敛,那么

$$c_n=\sum_{k=0}^{n}a_kb_{n-k},\qquad n=0,1,\cdots, \tag{1.3.8}$$

的母函数

$$C(s)=A(s)B(s),\qquad |s|<1. \tag{1.3.9}$$

定理 1.3.11 状态 i 是常返的当且仅当 $\sum_{n=0}^{\infty}p_{ii}^{(n)}=\infty$;如果状态 i 是非

常返的，则有

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \frac{1}{1-f_{ii}}.$$

证明　记$\{p_{ii}^{(n)}\}$和$\{f_{ii}^{(n)}\}$的母函数分别为$P(s)$和$F(s)$，并且约定$p_{ii}^{(0)}=1, f_{ii}^{(0)}=0$，由(1.3.7)得

$$P(s)-1 = P(s)F(s), \tag{1.3.10}$$

当$0\leqslant s<1$时，$F(s)<f_{ii}\leqslant 1$. 故由(1.3.10)得

$$P(s) = \frac{1}{1-F(s)}, \quad 0\leqslant s<1, \tag{1.3.11}$$

又因为对任意$0\leqslant s<1$及任意正整数N，有

$$\sum_{n=0}^{N} p_{ii}^{(n)}s^n \leqslant P(s) \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)}, \tag{1.3.12}$$

在(1.3.12)中令$s\uparrow 1, N\to\infty$，得

$$\lim_{s\uparrow 1} P(s) = \sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)}. \tag{1.3.13}$$

同理

$$\lim_{s\uparrow 1} F(s) = \sum_{n=0}^{\infty} f_{ii}^{(n)} = f_{ii}, \tag{1.3.14}$$

在(1.3.11)中令$s\uparrow 1$，由(1.3.13)，(1.3.14)得到定理的证明.

令$g_{ij}=p_i$(有无限多个n使$X_n=j$)$=p_i\{\bigcap_{m=1}^{\infty}\bigcup_{n=m}^{\infty}(X_n=j)\}$.　(1.3.15)

定理 1.3.12　对任意状态i，有

$$g_{ij} = \begin{cases} f_{ij}, & \text{当 } f \text{ 常返}, \\ 0, & \text{否则}. \end{cases} \tag{1.3.16}$$

证明　令

$$A_k = \{\omega: \text{至少有 } k \text{ 个 } n \text{ 使 } X_n(\omega)=j\},$$

显然$A_{k+1}\subset A_k$，且有

$$\lim_{k\to\infty} p_i(A_k) = g_{ij}.$$

另一方面，

$$\begin{aligned} p_i(A_{k+1}) = {} & p_i\{\bigcup_{m=1}^{\infty}(X_v\neq j, 1\leqslant v\leqslant m-1, X_m=j, \\ & \text{且至少有 } k \text{ 个 } n \text{ 使 } X_{n+m}=j)\} \\ = {} & \sum_{m=1}^{\infty} p_i\{(X_v\neq j, 1\leqslant v\leqslant m-1, X_m=j)p_j \\ & (\text{至少有 } k \text{ 个 } n \text{ 使 } X_n=j)\} \end{aligned}$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} f_{ij}^{(m)} p_j(A_k) = f_{ij} p_j(A_k). \tag{1.3.17}$$

反复迭代(1.3.17),并注意 $p_j(A_1)=f_{jj}$,我们得到

$$p_i(A_{k+1}) = f_{ij} f_{jj} p_j(A_{k-1}) = \cdots = f_{ij}(f_{jj})^n, \tag{1.3.18}$$

令 $k\to\infty$,如果 $f_{jj}=1$,则得到 $g_{ij}=f_{ij}$,如果 $f_{jj}<1$,则得到 $g_{ij}=0$,定理得证.

推论 1.3.13 状态 i 是常返的当且仅当 $g_{ii}=1$,如果状态 i 是非常返的,则有 $g_{ii}=0$.

证明 直接由定理 1.3.12 得到.

定理 1.3.14 假设状态 i 是常返的,且有周期为 d,则有

$$\lim_{n\to\infty} p_{ii}^{(nd)} = d/\mu_i. \tag{1.3.19}$$

证明 参见[2]64 页定理 2.

定理 1.3.15 假设状态 i 是常返的,则有

(1) 状态 i 是零常返的当且仅当 $\lim\limits_{n\to\infty} p_{ii}^{(n)}=0$.

(2) 状态 i 是遍历的当且仅当 $\lim\limits_{n\to\infty} p_{ii}^{(n)}=1/\mu_i>0$.

证明 (1)如果状态 i 是零常返,由(1.3.19)知 $\lim\limits_{n\to\infty} p_{ii}^{(nd)}=0$,但当 $n\neq 0$ $\bmod(d)$ 时 $p_{ii}^{(n)}=0$,故有 $\lim\limits_{n\to\infty} p_{ii}^{(n)}=0$;反之如果 $\lim\limits_{n\to\infty} p_{ii}^{(n)}=0$,而且 i 是正常返的,则由(1.3.19)得 $\lim\limits_{n\to\infty} p_{ii}^{(nd)}>0$,与假设矛盾.

(2)假设 $\lim\limits_{n\to\infty} p_{ii}^{(n)}=1/\mu_i>0$,这说明状态 i 是正常返的,且 $\lim\limits_{n\to\infty} p_{ii}^{(nd)}=1/\mu_i$,与(1.3.19)比较得到 $d=1$,故状态 i 是遍历的.反之由定理 1.3.14 知结论是显然的.

我们称自状态 i 可达状态 j,并记为 $i\to j$,如果存在 $n>0$ 使 $p_{ij}^{(n)}>0$,称状态 i 与状态 j 互通,并记为 $i\leftrightarrow j$,如果 $i\to j, j\to i$.由 C-K 方程易知,如果 $i\to j, j\to k$,则 $i\to k$,即可达关系具有传递性;当 i 是常返状态时,有 $i\to i$,即状态 i 是自返的;下面证明对常返状态可达关系还具有对称性.

定理 1.3.16 若状态 i 是常返的,而且 $i\to j$,则状态 j 是常返的,且有 $f_{ji}=1$.

证明 记

$$_j p_{ik}^{(n)} = p_i(X_v \neq j, 1\leqslant v\leqslant n-1, X_n = k),$$
$$_j f_{ik}^{(n)} = p_i(X_v \notin \{j,k\}, 1\leqslant v\leqslant n-1, X_n = k).$$

因为 $i\to j$,故 $f_{ij}>0$,但是

$$f_{ij} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)} = \sum_{n=1}^{\infty}\Big[{}_i f_{ij}^{(n)} + \sum_{r=1}^{n-1} {}_j p_{ii}^{(r)} \cdot {}_i f_{ij}^{(n-r)}\Big],$$

故存在 N,使

$$ {}_i f_{ij}^{(N)} > 0. \tag{1.3.20}$$

另外

$$0 = 1 - f_{ii} = \sum_{k \neq i} {}_i p_{ik}^{(N)}(1 - f_{ki}) \geqslant {}_i p_{ij}^{(N)}(1 - f_{ji}), \tag{1.3.21}$$

所以由(1.3.20),(1.3.21)知$(1-f_{ji})=0$,$j \to i$,假设 $p_{ji}^{(r)} = \alpha > 0$,$p_{ij}^{(s)} = \beta > 0$,则由 C-K 方程知,对任意正整数 n,有

$$p_{jj}^{(r+n+s)} \geqslant p_{ji}^{(r)} p_{ii}^{(n)} p_{ij}^{(s)} = \alpha\beta p_{ii}^{(r)}, \tag{1.3.22}$$

由定理 1.3.11 知 $\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \infty$,从而$\sum_{n=1}^{\infty} p_{jj}^{(n)} = \infty$,状态 j 是常返的.

下一定理指出互通的状态是同一类型的.

定理 1.3.17 如果 $i \leftrightarrow j$,则

(1)i 与j 同为常返状态或非常返状态;如果同为常返状态,则它们同为正常返状态或零常返状态.

(2)i 与j 有相同的周期.

证明 (1)的前一部分是定理 1.3.16 的直接推论.现假设 j 为零常返状态,根据定理 1.3.15 $\lim\limits_{n\to\infty} p_{jj}^{(n)}=0$,于是由(1.3.22)得$\lim\limits_{n\to\infty} p_{ii}^{(n)}=0$,故 i 也是零常返状态.

(2)设 i 的周期为d,j 的周期为t.由(1.3.22)知,对任意使得 $p_{ii}^{(n)}>0$ 的 n,必有 $p_{jj}^{(n+r+s)}>0$,从而 t 可以除尽 $n+r+s$,但 $p_{jj}^{(r+s)} \geqslant p_{ji}^{(r)} p_{ij}^{(s)} = \beta\alpha > 0$,所以 t 也可以除尽$r+s$,可见 t 除尽n.这表明 $t \leqslant d$,对称地可得 $t \geqslant d$,故 $t=d$.

1.3.3 状态空间的分类

定义 1.3.18 状态空间 E 的子集C 称为(随机)闭集,如果对任意 $i \in C$ 及 $k \notin C$ 都有 $p_{ik}=0$.闭集 C 称为不可分的,如果 C 的所有状态是互通的.马氏链$\{X_n : n=0,1,\cdots\}$称为是不可分的,如果状态空间 E 是不可分的.

定义 1.3.19 称状态 i 为吸收的,如果 $p_{ii}=1$.

定理 1.3.16 指出自常返状态只能到达常返状态,因此 E 中全体常返状态组成一个闭集C.在 C 中可达关系具有自返性,对称性和传递性,于是可将 C 按互通关系分解,而得到 E 的如下分解定理.

定理 1.3.20 任意马氏链的状态空间 E,可惟一地分解成有限个或可列个互不相交的子集 $D, C_1, C_2, \cdots$之和,使得

(1)每一个 C_n 是常返状态组成的不可分的闭集.

(2)C_n 中的所有状态是同类型的,或全是正常返,或全是零常返.它们有相同的周期,且 $f_{jk}=1$,$j,k \in C_n$.

(3) D 由全体非常返状态组成. 自 C_n 中的状态不能到达 D 中的状态.

证明 记 C 为全体常返状态组成的集合, $D=E-C$ 为非常返状态全体, 将 C 按互通关系分解, 状态空间 E 可分解成 $E=D\cup C_1\cup C_2\cup\cdots$, 其中, 每一个 C_n 是常返状态组成的不可分的闭集, 且由定理 1.3.18 知 C_n 中的所有状态是同类型的. 显然自 C_n 中的状态不能到达 D 中的状态.

1.3.4 $p_{ij}^{(n)}$ 的渐近性质与平稳分布

本段研究 $p_{ij}^{(n)}$ 的渐近性质, 讨论两个问题.

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}$ 是否存在.

(2) 如果此极限存在, 它是否与 i 有关.

定理 1.3.21 如果 j 是非常返或零常返, 则对任意 $i\in E$ 有 $\lim\limits_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}=0$.

证明 由 (1.3.7) 式, 我们有

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} f_{ij}^{(k)} p_{jj}^{(n-k)} = \sum_{k=1}^{\infty} I_{[0,n]}(k) f_{ij}^{(k)} p_{jj}^{(n-k)}, \tag{1.3.23}$$

因为 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_{ij}^{(k)}\leqslant 1$, 并且根据定理 1.3.11 和定理 1.3.15 知 $\lim\limits_{n\to\infty} p_{jj}^{(n)}=0$, 在 (1.3.23) 中, 令 $n\to\infty$, 根据控制收敛定理, 得到 (1.3.23) 的右边趋于零, 故 $\lim\limits_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}=0$.

推论 1.3.22 如果马氏链的状态个数有限, 则不可能全是非常返状态, 也不可能含有零常返状态. 从而不可分的有限马氏链必是正常返的.

证明 设 $E=\{0,1,\cdots,N\}$, 如果全是非常返状态, 则对任意 $i,j\in E$, 由定理 1.3.21 知 $\lim\limits_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}=0$, 故有

$$1 = \sum_{j=0}^{N} p_{ij}^{(n)} \to 0, \quad n\to\infty,$$

这就导出矛盾; 其次, 如果 E 含有零常返状态 i, 则 $C=\{j: i\to j\}$ 是由有限个零常返状态组成的闭集, 由定理 1.3.21 得

$$1 = \sum_{j\in C} p_{ij}^{(n)} \to 0, \quad n\to\infty, \tag{1.3.24}$$

得到同样的矛盾.

下面讨论 j 是正常返状态情形, 记

$$f_{ij}(r) = \sum_{m=0}^{\infty} f_{ij}^{(md+r)}, \qquad 0\leqslant r\leqslant d-1, \tag{1.3.25}$$

显然

$$\sum_{r=0}^{d-1} f_{ij}(r) = \sum_{m=0}^{\infty} f_{ij}^{(m)} = f_{ij}. \tag{1.3.26}$$

定理 1.3.23 如果 j 是正常返状态,周期为 d,则对任意 i 及 $0\leqslant r\leqslant d-1$,有

$$\lim_{m\to\infty} f_{ij}^{(md+r)} = f_{ij}(r)d/\mu_j. \tag{1.3.27}$$

证明 因为 $p_{jj}^{(n)}=0, n\neq 0\mathrm{mod}(d)$. 故

$$\begin{aligned}p_{ij}^{(md+r)} &= \sum_{v=0}^{md+r} f_{ij}^{(v)} p_{jj}^{(nd+r-v)} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} f_{ij}^{(md+r)} I_{[0,n]}(m) p_{jj}^{(n-m)d},\end{aligned} \tag{1.3.28}$$

根据定理 1.3.14

$$\lim_{n\to\infty} p_{jj}^{(n-m)d} = d/\mu_j;$$

在(1.3.28)中,令 $n\to\infty$,由控制收敛定理得(1.3.27).

定理 1.3.24 对任意状态 i,j,有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} p_{jj}^{(k)} = \begin{cases}0, & \text{当 } j \text{ 是非常返或零常返},\\ f_{ij}/\mu_j, & \text{当 } j \text{ 是正常返}.\end{cases}$$

证明 如果 j 是非常返或零常返,由定理 1.3.21 知 $\lim\limits_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}=0$,所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} p_{ij}^{(k)} = 0.$$

如果 j 是正常返,且周期为 d,根据定理 1.3.23,我们有

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} p_{ij}^{(k)} &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{[n/d]d} p_{ij}^{(k)} \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{r=0}^{d-1}\sum_{m=0}^{[n/d]} p_{ij}^{md+r} \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{[n/d]d}{n}\frac{1}{d}\sum_{r=0}^{d-1}\frac{1}{[n/d]}\sum_{m=0}^{[n/d]} p_{ij}^{(md+r)} \\ &= \frac{1}{d}\sum_{r=0}^{d-1} f_{ij}(r)d/\mu_j = f_{ij}/\mu_j.\end{aligned}$$

推论 1.3.25 如果马氏链是不可分的,常返的,那么对任意状态 i,j 有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} p_{ij}^{(k)} = \frac{1}{\mu_j}.$$

定理 1.3.26 如果马氏链是不可分的,遍历的(即所有状态是遍历的),那么 $\{\pi_k=1/\mu_k, k\in E\}$ 是下面方程组

$$y_j = \sum_{k\in E} y_k p_{kj}, \quad j\in E, \tag{1.3.29}$$

满足条件 $y_j\geqslant 0$,

$$\sum_{j\in E} y_j = 1, \tag{1.3.30}$$

的惟一解.

证明 令 $\pi_k = 1/\mu_k, k \in E$, 由定理 1.3.23 知 $\lim\limits_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \pi_j$, 对 $\sum\limits_{j\in E} p_{ij}^{(n)} = 1$ 应用 Fatou 引理得

$$\sum_{j\in E}\pi_j \leqslant 1, \tag{1.3.31}$$

在 C-K 方程 $p_{ij}^{(n+1)} = \sum\limits_{k\in E} p_{ik}^{n} p_{kj}$ 中令 $n \to \infty$, 由 Fatou 引理得

$$\pi_j \geqslant \sum_{k\in E}\pi_k p_{kj}, \tag{1.3.32}$$

$$\begin{aligned}\sum_{j\in E}\pi_j &\geqslant \sum_{j\in E}\sum_{k\in E}\pi_k p_{kj}\\ &= \sum_{k\in E}\pi_k\sum_{j\in E}p_{kj}\\ &= \sum_{k\in E}\pi_k.\end{aligned} \tag{1.3.33}$$

故对任意状态 j, 有 $\pi_j = \sum\limits_{k\in E}\pi_k p_{kj}$, 即 $\{\pi_j, j \in E\}$ 满足方程组(1.3.29), 其次, 我们有

$$\begin{aligned}\pi_j &= \sum_{k\in E}\pi_k p_{kj}\\ &= \sum_{k\in E}\Big(\sum_{i\in E}\pi_i p_{ik}\Big)p_{kj}\\ &= \sum_{i\in E}\pi_i p_{ij}^{(2)} = \cdots = \sum_{i\in E}\pi_i p_{ij}^{(n)}.\end{aligned} \tag{1.3.34}$$

令 $n\to\infty$, 由控制收敛定理得 $\pi_j = \Big(\sum\limits_{i\in E}\pi_i\Big)\pi_j$, 因为 $\pi_j > 0$, 所以 $\sum\limits_{i\in E}\pi_i = 1$, 即(1.3.30)满足. 再证明惟一性, 假设 $\{\omega_j, j \in E\}$ 是方程组(1.3.29)的满足(1.3.30)的另一个解. 类似于(1.3.34)的推导得

$$\omega_j = \sum_{j\in E}\omega_i p_{ij}^{(n)}, \tag{1.3.35}$$

令 $n \to \infty$ 得, $\omega_j = \Big(\sum\limits_{i\in E}\omega_i\Big)\pi_j = \pi_j$.

定义 1.3.27 设 $(p_{ij})_{i,j\in E}$ 是马氏链 $\{X_n : n = 0, 1, \cdots\}$ 的转移矩阵, 如果非负数列 $\{\pi_j, j \in E\}$ 满足

$$\sum_{j\in E}\pi_j = 1,$$

$$\pi_j = \sum_{k\in E}\pi_k p_{kj}, \quad j \in E.$$

则称 $\{\pi_j, j \in E\}$ 为马氏链 $\{X_n : 0, 1, \cdots\}$ 的平稳分布.

定理 1.3.26 指出, 不可分的遍历的马氏链恒有惟一的平稳分布.

定理 1.3.28 假设 $\{\pi_k, k \in E\}$ 为马氏链 $\{X_n : n = 0, 1, \cdots\}$ 的平稳分布,

如果

$$p(X_0 = k) = \pi_k, \quad k \in E,$$

则

$$p(X_n = k) = \pi_k, \quad n = 0,1,\cdots,$$

而且对任意正整数 n, l 及任意状态 $j_v, 0 \leqslant v \leqslant l$，有

$$P(X_{n+v} = j_v, 0 \leqslant v \leqslant l) = P(X_v = j_v, 0 \leqslant v \leqslant l).$$

证明

$$\begin{aligned} p(X_n = k) &= \sum_j p(X_0 = j) p_{jk}^{(n)} \\ &= \sum_{j \in E} \pi_j p_{jk}^{(n)} = \pi_k, \quad n = 0,1,\cdots. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(X_{n+v} = j_v, 0 \leqslant v \leqslant l) &= p(X_n = j_0) p_{j_0 j_1} \cdots p_{j_{l-1} j_l} \\ &= p(X_0 = j_0) p_{j_0 j_1} \cdots p_{j_{l-1} j_l} \\ &= P(X_v = j_v, 0 \leqslant v \leqslant l). \end{aligned}$$

1.3.5　离散时间连续状态的马尔可夫链

记号 N^+ 表示非负整数全体，$\mathscr{B}(R^k)$ 是 R^k 的 Borel 集全体.

定义 1.3.29　设 $\{X_n, n \in N^+\}$ 为定义在概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 上，取值于可测空间 $\{R^k, \mathscr{B}(R^k)\}$ 的随机过程. 如果对于任意有限个 $t_1 < \cdots < t_n$, $t_i \in N^+$, $i = 1,2,\cdots,n$，任意 $A \in \mathscr{B}(R^k)$ 有

$$P(X_{t_n} \in A \mid X_{t_1}, \cdots, X_{t_{n-1}}) = P(X_{t_n} \in A \mid X_{t_{n-1}}), \quad a.s. \tag{1.3.36}$$

则称此过程为离散时间连续状态的马尔可夫链(简称为马氏链).

引入记号

$$\begin{aligned} N_s^t &= \sigma(X_u : s \leqslant u \leqslant t; s, u, t \in N^+), \\ N^t &= \sigma(X_u : u \leqslant t; u, t \in N^+), \\ N_s &= \sigma(X_u : s \leqslant u; s, u \in N^+). \end{aligned}$$

以下诸定理可以在一般的随机过程书(例如参见[2])上找到.

定理 1.3.30　马氏性(1.3.36)等价于下列性质：对于任意固定的 $t \in N^+$，如果函数 f 为 N^t 可测，并且 $E|f| < \infty$，则有

$$E(f \mid N^t) = E(f \mid X_t), \quad a.s.$$

下一定理说明：在已知“现在”的条件下，“将来”与“过去”是独立的.

定理 1.3.31　使 $\{X_n, n \in N^+\}$ 是马氏链的充分必要条件是：对于任意有限个 $s_1 < \cdots < s_m < t < t_1 < \cdots < t_n$; $s_j, t, t_i \in N^+$，及 $A_j, B_k \in \mathscr{B}(R^k)$, $j = 1, \cdots, m$; $k = 1, \cdots, n$，有

$$P(X_{s_j}\in A_j, j=1,\cdots,m;\quad X_{t_k}\in B_k, k=1,\cdots,n\mid X_t)$$
$$=P(X_{s_j}\in A_j, j=1,\cdots,m\mid X_t)P(X_{t_k}\in B_k, k=1,\cdots,n\mid X_t).$$

定义1.3.32 四元函数$p(s,x,t,A)$, $s,t\in N^+$, $s\leqslant t$, $x\in R^k$, $A\in\mathscr{B}(R^k)$称为转移概率函数,如果

(1) 对固定的s,x,t,它关于A是$\mathscr{B}(R^k)$上的概率测度.

(2) 对固定的s,t,A,它关于x是$\mathscr{B}(R^k)$可测函数.

(3) $p(s,x,t,\{x\})=1$.

(4) Kolmogolov-Chapman 方程成立:对任意$s\leqslant t\leqslant u$; $s,t,u\in N^+$,有

$$p(s,x,u,A)=\int_E p(s,x,t,\mathrm{d}y)p(t,y,u,A).$$

定义 1.3.33 称转移概率函数$p(s,x,t,A)$为齐次的,如果$p(s,x,t,A)=p(t-s,x,A)$.

定理 1.3.34 设$\{X_n, n\in N^+\}$为定义在概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$上,取值于可测空间$\{R^k,\mathscr{B}(R^k)\}$的随机过程.如果存在转移概率函数$p(s,x,u,A)$, $s,t\in N^+$, $s\leqslant t$, $x\in R^k$, $A\in\mathscr{B}(R^k)$,使得对于任意有限个$t_1<\cdots<t_n$, $t_i\in N^+$,任意$A_i\in\mathscr{B}(R^k)$,有

$$P(X_{t_j}\in A_i, i=1,\cdots,n)$$
$$=\int_{A_0}p_{t_0}(\mathrm{d}x_0)\int_{A_1}p(t_0,x_0;1,\mathrm{d}x_1)\cdots\int_{A_n}p(t_{n-1},x_{n-1};t_n,\mathrm{d}x_n),$$

则$\{X_n, n\in N^+\}$是马氏链。这里$P_t(A)=P(X_t\in A)$, $A\in\mathscr{B}(R^k)$;这时称$p(s,x,u,A)$为马氏链的转移概率函数.

例 1.3.35(随机迭代映射) 设(W_n)是独立同分布随机变量列,$X_{n+1}=f(X_n)+W_n$,并且X_0与(W_n)独立.在$X_n=x$的条件下,我们有$X_{n+1}=f(x)+W_n$,因而它与$(X_0,W_1,\cdots,W_{n-1})$独立,也与$(X_n,X_{n-1},\cdots,X_0)$独立.设W_n具有分布密度$p_n(y)$,于是

$$P(X_{n+1}\leqslant y\mid X_n=x, X_{n-1}=x_{n-1},\cdots,X_0=x_0)$$
$$=P((f(x)+W_n)\leqslant y\mid X_n=x, X_{n-1}=x_{n-1},\cdots,X_0=x_0)$$
$$=P((f(x)+W_n)\leqslant y)$$
$$=P((W_n)\leqslant y-f(x))$$
$$=\int_{-\infty}^{y-f(x)}p(z)\mathrm{d}z$$
$$=\int_{-\infty}^{y}p(z-f(x))\mathrm{d}z.$$

同理有

$$P(X_{n+1}\leqslant y\,|\,X_n=x_n)=\int_{-\infty}^{y}p(z-f(x))\mathrm{d}z.$$

可见

$$\begin{aligned}&P(X_{n+1}\leqslant y\,|\,X_n=x_n,X_{n-1}=x_{n-1},\cdots,X_0=x_0)\\&=P(X_{n+1}\leqslant y\,|\,X_n=x_n)\\&=\int_{-\infty}^{y}p(z-f(x))\mathrm{d}z.\end{aligned}$$

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{y-f(x)}p(z)\mathrm{d}z=\int_{-\infty}^{y}p(z-f(x))\mathrm{d}z.$$

在 x 固定的条件下它是以 y 为变量的一个分布函数,称为从 X_n 转移到 X_{n+1} 的转移分布函数,它具有密度 $p(y-f(x))$,称为从 X_n 到 X_{n+1} 的转移概率密度,这是一个条件概率密度.

例 1.3.36　设 (W_n) 是独立随机变量列,W_n 具有分布密度 $p_n(y)$,$X_{n+1}=f(X_n,W_n)$,X_0 与 (W_n) 独立.此时 W_n,$f(x,W_n)$ 与 $(X_n,X_{n-1},\cdots,X_0)$ 独立.于是

$$\begin{aligned}&P(X_{n+1}\leqslant y\,|\,X_n=x,X_{n-1}=x_{n-1},\cdots,X_0=x_0)\\&=P(f(x,W_n)\leqslant y\,|\,X_n=x,X_{n-1}=x_{n-1},\cdots,X_0=x_0)\\&=P(f(x,W_n)\leqslant y)\\&=\int_{f(x,z)\leqslant y}p_n(z)\mathrm{d}z.\end{aligned}$$

同理有

$$P(X_{n+1}\leqslant y\,|\,X_n=x_n)=\int_{f(x,z)\leqslant y}p_n(z)\mathrm{d}z,$$

记 $F_n(x,y)=\int_{f(x,z)\leqslant y}p_n(z)\mathrm{d}z$,那么在 $X_n=x$ 的条件下,X_{n+1} 的条件分布函数为 $F_n(x,y)$.

在例 1.3.35 中 $\int_{-\infty}^{y-f(x)}p_n(z)\mathrm{d}z$ 与 n 无关,是时齐马氏链;在例 1.3.36 中 $\int_{f(x,z)\leqslant y}p_n(z)\mathrm{d}z$ 依赖于 n,是非时齐马氏链.

第二章　随机逼近算法的分析方法

本章介绍研究随机逼近算法收敛性的几种常用方法(如鞅方法、常微分方程方法、Lyapunov 方法等)以及几种方法所用的典型条件和相应的收敛性定理. 本章主要内容取材于文献[12].

§2.1　随机逼近算法

设未知函数 $h(\theta):R^d\to R^d$(函数形式未知),其零点为 θ^0,即

$$h(\theta^0)=0, \tag{2.1.1}$$

对 $h(\cdot)$可以在任意点 θ 进行量测,但量测带有误差. 若 θ_n 为第 n 次量测时取定的自变量值,则函数的观察值为

$$X_{n+1}=h(\theta_n)+\varepsilon_{n+1}, \tag{2.1.2}$$

$\{\varepsilon_n\}$是量测误差列,可依赖 θ_n, $h(\cdot)$也常称之为回归常数. 用数列$\{\theta_n\}$和$\{X_n\}$求回归函数的根 θ^0,这就是随机逼近问题.

1951 年,Robbins 和 Monro 首先提出并研究了一种随机逼近算法[7],他们取数列$\{\Upsilon_k\}$为增益系数:

$$\Upsilon_k>0,\quad \sum_k\Upsilon_k=\infty,\quad \sum_k\Upsilon_k^2<\infty, \tag{2.1.3}$$

对 θ^0 的第 $n+1$ 次逼近为

$$\theta_{n+1}=\theta_n+\Upsilon_nX_{n+1}, \tag{2.1.4}$$

其中 X_n 由(2.1.2)式定义,这就是著名的 Robbins-Monro(RM)算法. 当时他们讨论了$\{\varepsilon_n\}$相互独立,$d=1$,$h(\cdot)$严格单调情形,并证明了

$$E|\theta_n-\theta^0|^2\to 0\qquad(n\to\infty).$$

增益系数$\{\Upsilon_k\}$又称步长因子,性质(2.1.3)对随机逼近算法和其他某些随机递推算法都是必要的. 条件 $\sum_k\Upsilon_k^2<\infty$ 的实质是 Υ_k 必须趋于零,也就是每步修正量应越来越小,直至把量测误差的影响慢慢压制下去,使 Υ_nX_n 中的 $\Upsilon_n\varepsilon_n\to 0(n\to\infty)$. 但是 $\sum_k\Upsilon_k=\infty$ 又说明,Υ_k 趋于零的速度不能太快. 因为若 $\sum_k\Upsilon_k<\infty$,这时即使 $\varepsilon_n\equiv 0$,$h(\cdot)$一致有界 $\|h(\cdot)\|<c$,那么

$$\sum_k\|\theta_{k+1}-\theta_k\|\leqslant\sum_k\Upsilon_k\|h(\theta_k)\|\leqslant c\sum_k\Upsilon_k,$$

这表明增量 $\|\theta_{k+1}-\theta_k\|$ 之和与初值 θ_0 无关地一致有界,因而当初值 θ_0 与 θ^0 相距很远时,θ_n 不可能逼近 θ^0,即使有极限也不是 θ^0,故必须有 $\sum\limits_k \Upsilon_k = \infty$.

1952 年 Kiefer 和 Wolfowitz[8]从 RM 算法出发研究求未知函数 $h(\theta^0)$的极值的算法问题.如果能直接量测 $h(\cdot)$的导数,那么问题就归结为上面的 RM 算法.但有时只能量测 $h(\cdot)$本身,只好利用 $h(\cdot)$的量测值的差商去估计 $h(\cdot)$的导数值,这就是 KW 算法的基本思想.

例　考察带有不同混合比的合金在固定的温度被熔化.合金硬度依赖于由 $\theta^0\in R^k$ 刻画的混合比,但遭受随机影响;设 $F(\theta)$是温度的期望值,我们的目的是递推估计 F 的极大值.从初始混合比 $\theta_1\in R^k$ 开始,设 θ_n 刻画第 n 步的混合比;对于临近点 $\theta_n\pm c_n e_l(l=1,\cdots,k)$,带 $0<c_n\to 0$;单位向量 e_l(第 l 个坐标是 1),我们分别得到随机强度 X'_{nl}和X''_{nl},下一步的混合比取作为

$$\theta_{n+1} = \theta_n + \frac{c}{n}\left(\frac{X'_{nl} - X''_{nl}}{2c_n}\right)_{l=1,\cdots,k}, \qquad c > 0.$$

如果 F 是全可微的,导数记为 DF,递推式能形式地写为

$$\theta_{n+1} = \theta_n + \frac{c}{n}[DF(\dot{\theta}_n) - H_n - V_n],$$

其中 θ_n, H_n, V_n 是随机向量,在用差分比代替微商时,$-H_n$ 被看作为系统误差,$-V_n$ 被看作为随机误差,满足

$$E(V_n \mid \theta_1, H_1, V_1, \cdots, \theta_{n-1}, H_{n-1}, V_{n-1}) = 0,$$

在关于 F 和误差的一些假设之下,(θ_n) a.s. 收敛到 F 的极大值点.

对任何一种递推算法,收敛法是首要问题.本章以 RM 算法为对象,介绍研究算法收敛性的几种常用方法.

§2.2　鞅　方　法

用鞅方法研究 RM 算法的收敛性,主要针对不相关量测噪声的情形.这个方法的基本思路是:首先把要讨论的收敛性问题中的序列转化为某一个上鞅或鞅序列,然后证明这样的鞅序列满足鞅收敛定理的条件,获得鞅序列的收敛性,再转化成原来序列的收敛性.

20 世纪 70 年代初,在量测误差为鞅差列时,证明了各种意义下多维算法的收敛性.为了说明这种方法,我们证明下面定理,先引入如下一组假设 A2.2.

A 2.2.1　步长因子列$\{\Upsilon_k\}$满足

$$\Upsilon_k > 0, \quad \sum_k \Upsilon_k = \infty, \quad \sum_k \Upsilon_k^2 < \infty. \qquad (2.2.1)$$

A 2.2.2 存在具有有界连续二阶导数的 Lyapunov 函数 $V(\theta): R^d \to R$，满足：

$$\text{对任意 } \theta \neq \theta^0, V(\theta) > 0; V(\theta^0) = 0; V(\theta) \to \infty, \|\theta\| \to \infty. \tag{2.2.2}$$

对任意 $\varepsilon > 0$，有

$$\sup_{\|\theta - \theta^0\| > \varepsilon} V_\theta^\tau(\theta) h(\theta) = -\beta_\varepsilon < 0. \tag{2.2.3}$$

A 2.2.3 量测误差 $\{\varepsilon_n, \mathscr{F}_n\}$ 是鞅差序列（ε_n 可依赖于 $\theta_{n-1}, \cdots, \theta_0$），满足

$$E\{\|\varepsilon_n\|^2\} < \infty. \tag{2.2.4}$$

A 2.2.4 回归函数 $h(\theta)$ 满足

$$\|h(\theta)\|^2 + E\{\|\varepsilon_n\|^2 | \mathscr{F}_{n-1}\} \leqslant c(1 + V(\theta)), n \geqslant 0. \tag{2.2.5}$$

定理 2.2.1 设 A 2.2.1～A 2.2.4 成立，则对任意初始值 θ_0，由算法 (2.1.5) 定义的

$$\theta_n \to \theta^0, \quad n \to \infty, \quad a.s.$$

先证明一个引理.

引理 2.2.2 设对于任意 θ，$V(\theta) \geqslant 0$，$\{V(\theta_n), \mathscr{F}_n\}$ 是非负上鞅，σ 是一停时，且

$$E\{V(\theta_{n+1}) | \mathscr{F}_n\} \leqslant V(\theta_n) - \gamma_n I_{[\sigma > n]},$$

其中

$$\gamma_n > 0, \quad \sum_n \gamma_n = \infty.$$

那么 $P[\sigma < \infty] = 1$.

证明 设

$$V_{n+1} = V(\theta_{n+1}) I_{[\sigma > n]} + \sum_{n=0}^{k} \gamma_n I_{[\sigma > n]},$$

那么

$$E\{V_{n+1} | \mathscr{F}_n\} \leqslant [V(\theta_n) - \gamma_n] I_{[\sigma > n]} + \sum_{n=0}^{k} \gamma_n I_{[\sigma > n]} = V_n,$$

根据上鞅收敛定理（参见推论 1.2.4）知 V_n $a.s.$ 收敛到有穷极限. 故

$$\sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n I_{[\sigma > n]} < \infty, \quad a.s.,$$

即 $P\left[\sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n I_{[\sigma > n]} = \infty\right] = 0$. 再由 $\sum_k \gamma_k = \infty$ 得，$P[\sigma < \infty] = 1$.

现来证明定理 2.2.1

由 A 2.2.3 和 (2.1.5) 知 θ_n 是 $\mathscr{F}_n$ 可测，由 Taylor 展开得

$$V(\theta_{n+1}) = V(\theta_n) + \Upsilon_n V_\theta^\tau(\theta_n)(h(\theta_n) + \varepsilon_{n+1})$$

$$+\frac{1}{2}\gamma_n^2(h(\theta_n)+\varepsilon_{n+1})^\tau V_\theta(\xi_n)(h(\theta_n)+\varepsilon_{n+1})$$
$$\leqslant V(\theta_n)+\Upsilon_n V_\theta^\tau(\theta_n)\varepsilon_{n+1}+c_1\gamma_n^2(\|h(\theta_n)\|^2+\|\varepsilon_{n+1}\|^2)$$
$$+\Upsilon_n V_\theta^\tau(\theta_n)h(\theta_n). \tag{2.2.6}$$

其中ξ_n的分量在θ_n和θ_{n+1}的相应分量之间.由$EV(\theta_0)=V(\theta_0)<\infty$,(2.2.3),(2.2.4),(2.2.5)和

$$E\{V_\theta^\tau(\theta_n)\varepsilon_{n+1}\}=E\{V_\theta^\tau(\theta_n)E\{\varepsilon_{n+1}|\mathscr{F}_n\}\}=0,$$

可递推地得到$EV(\theta_n)<\infty$,且

$$E\{V(\theta_{n+1})|\mathscr{F}_n\}\leqslant V(\theta_n)+cc_1\gamma_n^2(1+V(\theta_n))+\Upsilon_n V_\theta^\tau(\theta_n)h(\theta_n)$$
$$\leqslant V(\theta_n)+cc_1\gamma_n^2(1+V(\theta_n)), \tag{2.2.7}$$

令

$$V_{n+1}=(1+V(X_{n+1}))\prod_{i=n+1}^{\infty}(1+cc_1\gamma_i^2), \tag{2.2.8}$$

由(2.2.7)得

$$E\{V_{n+1}|\mathscr{F}_n\}\leqslant[1+V(\theta_n)+cc_1\gamma_n^2(1+V(\theta_n))$$
$$+\Upsilon_n V_\theta^\tau(\theta_n)h(\theta_n)]\prod_{i=n+1}^{\infty}(1+cc_1\gamma_i^2)$$
$$=[1+V(\theta_n)]\prod_{i=n}^{\infty}(1+cc_1\gamma_i^2)$$
$$+\Upsilon_n V_\theta^\tau(\theta_n)h(\theta_n)\prod_{i=n+1}^{\infty}(1+cc_1\gamma_i^2)$$
$$=V_n+\Upsilon_n V_\theta^\tau(\theta_n)h(\theta_n)\prod_{i=n+1}^{\infty}(1+cc_1\gamma_i^2)$$
$$\leqslant V_n, \tag{2.2.9}$$

故$\{V_n,\mathscr{F}_n\}$是非负上鞅,V_n a.s.收敛.

因为由$\sum_k\Upsilon_k^2<\infty$,推得$\prod_{i=n}^{\infty}(1+cc_1\gamma_i^2)<\infty$;从而由$V_n$ a.s.收敛,推得$V(\theta_n)$ a.s.收敛.

对任意$\varepsilon>0$,用$\sigma_{\varepsilon,0}$表示$\{\theta_n\}$首次跑出$G_\varepsilon=\{\theta:\|\theta-\theta^0\|>\varepsilon\}$的时间,用$\sigma_{\varepsilon,i}$表示在$\sigma_{\varepsilon,i-1}$以后首次跑出$G_\varepsilon$的时间.

$$\sigma_{\varepsilon,i}:=\min\{t:t>\sigma_{\varepsilon,i-1},\theta_t\in G_\varepsilon^c\},$$

那么对于任意i,用(2.2.3)式,从(2.2.9)式还可得

$$E\{V_{n+1}|\mathscr{F}_n\}\leqslant V_n+\Upsilon_n V_\theta^\tau(\theta_n)h(\theta_n)I_{[\sigma_{\varepsilon,i}>n]}$$

$$\leqslant V_n - \beta_\varepsilon \Upsilon_n I_{[\sigma_{\varepsilon,i}>n]}.$$

由引理 2.2.2 得 $p(\sigma_{\varepsilon,i}<\infty)=1$,即$\{\theta_n\}$以概率 1 最终进入 G_ε^c,由于 i 是任意的,故存在子列$\{\theta'_n\}$,当 n 充分大时,$\|\theta'_n-\theta^0\|<\varepsilon$,由 ε 的任意性推得,存在子子列(此子子列仍然记为$\{\theta'_n\}$),使$\theta'_n\to\theta^0$, $n\to\infty$;但已经证明 $V(\theta_n)$ $a.s.$收敛,故$(\theta_n)\to V(\theta^0)=0$,再用(2.2.2)式,由此知 $\theta_n\to\theta^0$, $n\to\infty$.

§2.3 常微分方程方法

鞅方法通常要求所讨论的随机序列为鞅差序列,如果这个序列为相关序列,特别是无穷相关序列,则很难用鞅方法处理.20 世纪 70 年代中,对相关噪声下的随机逼近收敛性分析,还没有合适的方法.

1977 年瑞典学者 Ljung. L 在看到形如(2.1.4)一类算法的收敛性与下面常微分方程

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=h(\theta)$$

的稳定性有关。粗略地说,若记 $\theta(t_n)=\theta_n$, $t_{n+1}-t_n=\gamma_n$ 把算法(2.1.4)写成

$$\frac{\theta(t_{n+1})-\theta(t_n)}{t_{n+1}-t_n}=\frac{\theta_{n+1}-\theta_n}{\gamma_n}=h(\theta(t_n))+\varepsilon_n,$$

$n\to\infty$时,它接近于$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=h(\theta)$.

下面是用常微分方程方法来证明随机逼近算法的大范围强收敛性.

考虑 d 维常微分方程

$$\dot{\theta}_t=h(\theta_t),\quad t\geqslant 0,\quad h(\theta^0)=0. \tag{2.3.1}$$

定理 2.3.1[36] 设存在可微函数 $V(\theta)$满足:

对任意 $\theta\neq\theta^0$, $V(\theta)>0$; $V(\theta^0)=0$; $V(\theta)\to\infty$ ($\|\theta\|\to\infty$);且对任意 $\theta\neq\theta^0$,

$$V_\theta^\tau(\theta)h(\theta)<0. \tag{2.3.2}$$

那么从任意初值开始,当 $t\to\infty$时,方程(2.3.1)的轨线必趋于 θ^0,即 θ^0 是方程(2.3.1)的大范围渐近稳定解.

下面引入条件组 A 2.3

A 2.3.1 $\gamma_n>0, \gamma_n\to 0, \sum_n \gamma_n=\infty.$ (2.3.3)

A 2.3.2 存在二次连续可微的 Lyapunov 函数 $V(\theta)$满足:对任意 $\theta\neq$

$\theta^0, V(\theta)>0$,

$$V(\theta^0) = 0, V(\theta) \to \infty(\|\theta\| \to \infty), \tag{2.3.4}$$

对任意 $\theta \neq \theta^0$,

$$V_\theta^\tau(\theta)h(\theta) < 0. \tag{2.3.5}$$

A 2.3.3　量测误差$\{\varepsilon_n\}$满足：$\varepsilon_n = e_n + v_n$，其中 $\sum_n \gamma_n e_{n+1}$, $a.s.$ 收敛，

$$v_n \to 0(n \to \infty), \quad a.s. \tag{2.3.6}$$

注 2.3.2　显然 A 2.3.1 弱于 A 2.2.1；A 2.3.2 中去掉了A 2.2.2中 $V_\theta(\cdot)$的有界性；这里不要求 A 2.2.4，这是因为 ODE 法要预先假设算法$\{\theta_n\}$一致有界，也就是说 A 2.2.4 与假设算法一致有界在保证算法收敛有相互替代作用.这里强调 A 2.3.3 比 A 2.2.3 弱得多.满足 A 2.3.3 的$\{\varepsilon_n\}$不仅包含 A 2.2.3 的鞅差列，且包含很大一类无穷相关的随机列.

下面给出 ODE 法证明的 RM 算法大范围收敛性定理.

定理 2.3.3　设函数 $h(\cdot): R^1 \to R^1$ 连续，且条件组 A 2.3 的各条件成立，还假设(2.1.4)给出的$\{\theta_n\}$ $a.s.$一致有界，则对任意初值 θ_0，有

$$\theta_n \to \theta^0, \quad n \to \infty, \quad a.s.$$

证明　分四步进行.以下固定 $\omega \in \Omega$，随机向量 θ_n 的样本值 $\theta_n(\omega)$，仍然记为 θ_n.

第 1 步　把$\{\theta_n\}$通过线性插值变成连续函数，然后逐次向左平移单位长，得一族连续函数.令

$$t_n = \sum_{i=0}^{n-1} \gamma_i, \quad t_0 = 0, \quad m(t) = \max\{n : t_n \leqslant t\}. \tag{2.3.7}$$

$$\theta_{t_n}^0 = \theta_n, \quad \theta_t^0 = \frac{t_{n+1} - t}{\gamma_n}\theta_n + \frac{t - t_n}{\gamma_n}\theta_{n+1}, \quad t \in [t_n, t_{n+1}), \tag{2.3.8}$$

类似地，记

$$q_n = \sum_{i=0}^{n-1} \gamma_i e_{i+1}, \tag{2.3.9}$$

q_t^0 为内插长度为$\{\gamma_n\}$的 q_n 的线性内插.

再定义连续函数族

$$\theta_n(t) = \theta_{t+n}^0, \quad n \geqslant 1. \tag{2.3.10}$$

第 2 步　证明$\{\theta_n(t)\}$满足 Arzela-Ascoli 定理的条件，根据该定理得一极限函数 $\theta(t)$.设

$$\bar{\theta}_t = \theta_n, \quad \bar{v}_t = v_n, \quad t \in [t_n, t_{n+1}), \tag{2.3.11}$$

显然，由(2.3.7)～(2.3.10)知，

$$\theta_n(t) = \theta_0 + \int_0^{t+n} (h(\bar{\theta}_s) + \bar{v}_s)\mathrm{d}s + q_{t+n}^0,$$

事实上,只需证明

$$\theta^0(t)-\theta_0=\int_0^t(h(\bar\theta_s)+\bar\nu_s)\mathrm{d}s+q_t^0, \tag{2.3.12}$$

当 $t=t_n$ 时,(2.3.12)的左式等于

$$\begin{aligned}\theta^0(t_n)-\theta_0&=\theta_n-\theta_0=\sum_{k=0}^{n-1}(\theta_{k+1}-\theta_k)\\&=\sum_{k=0}^{n-1}\gamma_kX_{k+1}=\sum_{k=0}^{n-1}\gamma_k(h(\theta_k)+\varepsilon_k)\\&=\sum_{k=0}^{n-1}\gamma_k(h(\theta_k))+\sum_{k=0}^{n-1}\gamma_ke_k+\sum_{k=0}^{n-1}\gamma_kv_k\\&=\int_0^{t_n}h(\bar\theta_s)\mathrm{d}s+\int_0^{t_n}\bar\nu_s\mathrm{d}s+q_n\\&=\int_0^{t_n}(h(\bar\theta_s)+\bar\nu_s)\mathrm{d}s+q_{t_n}^0.\end{aligned}$$

当 $t_n\leqslant t\leqslant t_{n+1}$时,类似可证.

根据定理的假设,对任意固定 ω,$\{\theta_n(t,\omega)\}$是一致有界,现来证明它是等度连续的.对任意 $\Delta>0$,有

$$\|\theta_n(t+\Delta)-\theta_n(t)\|\leqslant\left\|\int_{t+n}^{t+n+\Delta}(h(\bar\theta_s)+\bar\nu_s)\mathrm{d}s\right\|+\|q_{t+n+\Delta}^0-q_{t+n}^0\|. \tag{2.3.13}$$

由条件 A 2.3.3 得,当 $t\to\infty$时,q_t^0 趋于有穷极限,故(2.2.13)右边第 2 项,当 $\Delta\to0$ 时,关于 n 是一致地趋于零.同时根据 A 2.3.3 和 $h(\bar\theta_t)$在$(0,\infty)$上有界,知(2.3.13)右边第 1 项,当 $\Delta\to0$ 时,关于 n 也是一致地趋于零.对 $\Delta<0$ 的情形,可以进行同样的推导.故$\{\theta_n(t)\}$是等度连续的.由 Arzela-Ascoli 定理知,存在子列$\{\theta_{n_k}(t)\}$在任何有限区间上一致收敛于一连续函数 $\theta(t)$.

第 3 步 证明 $\theta(t)$满足

$$\dot\theta_t=h(\theta_t). \tag{2.3.14}$$

设子列$\{\theta_{n_k}(t)\}$一致收敛于 $\theta(t)$,$k\to\infty$,由

$$\theta_{n_k}(t)-\theta_{n_k}(0)=\int_0^t(h(\bar\theta(s+n_k))+\bar\nu(s+n_k))\mathrm{d}s+q^0(t+n_k)-q^0(n_k)$$

由于 $h(\bar\theta(\cdot))+\bar V(\cdot)$是有界函数,且当 $k\to\infty$时,$\bar V(s+n_k)\to0$,$\bar\theta(s+n_k)\to\theta(s)$.事实上

$$|\bar\theta(s+n_k)-\theta(s)|\leqslant\bar\theta(s+n_k)-\theta_0(s+n_k)|\theta_{n_k}(t)-\theta(s)|.$$

当 $t_{k'}\leqslant s+n_k<t_{k'+1}$时,

$$\begin{aligned}\left|\bar{\theta}(s+n_k)-\theta_0(s+n_k)\right| &= \frac{(s+n_k)-t_{k'}}{\gamma_{k'}}\left|\theta_{k'+1}-\theta_{k'}\right| \\ &\leqslant \left|\theta_{k'+1}-\theta_{k'}\right| \\ &= \gamma_{k'}\left|h(\theta_{k'}+\varepsilon_{k'+1})\right|\to 0,\quad k'\to\infty;\end{aligned}$$

$$\left|\theta_{n_k}(t)-\theta(t)\right|\to 0,\quad k\to\infty.$$

由控制收敛定理得

$$\theta(t)-\theta(0)=\int_0^t h(\theta(s))\mathrm{d}s,$$

即 $\dot{\theta}=h(\theta_t),\quad t\geqslant 0.$

第 4 步　从 $\theta(t)\to\theta^0, t\to\infty$,到 $\theta_n\to\theta^0, n\to\infty$.

由 A 2.3.2 及定理 2.3.1 知 θ^0 为 $\theta(t)$的大范围渐近稳定解,于是有

$$\theta(t)\to\theta^0,\quad t\to\infty. \tag{2.3.15}$$

为了证明 $\theta_n\to\theta^0, n\to\infty$,只需证明,对于$\{\theta_n\}$的任意子列,存在子子列收敛到 θ^0. 为了简化记号,我们证明$\{\theta_n\}$存在子列收敛到 θ^0. 事实上,对于任意 $\varepsilon>0$,存在 t_0,使得当 $t\geqslant t_0$ 时,$|\theta(t)\to\theta^0|<\varepsilon/2$,取子列$\{n_k\}$使 $\theta_{n_k}(\cdot)$在$[0,t_0+1]$上一致收敛于 $\theta(t)$;利用 $t_n\uparrow\infty$,对每个 t_0+n_k 取$t_{n_{k'}}$满足 $t_{n_{k'}}\leqslant t_0+n_k<t_{n_{k'}+1}$则有

$$\begin{aligned}&\left|\theta_{n_{k'}}-\theta^0\right|=\left|\theta^0(t_{n_{k'}})-\theta^0\right| \\ \leqslant&\left|\theta^0(t_{n_{k'}})-\theta^0(t_0+n_k)\right|+\left|\theta_{n_k}(t_0)-\theta(t_0)\right|+\left|\theta(t_0)-\theta^0\right|.\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}\left|\theta^0(t_{n_{k'}})-\theta^0(t_0+n_k)\right| &\leqslant \left|\theta_{n_{k'}+1}-\theta_{n_{k'}}\right| \\ &\leqslant \gamma_{n_{k'}}(h(\theta_{n_{k'}})+\varepsilon_{n_{k'}+1})\to 0,\quad k'\to\infty.\end{aligned}$$

$$\theta_{n_{k'}}\to x^0,\quad k'\to\infty.$$

§2.4　Lyapunov 函数方法

§2.3 在算法有界的条件下,利用 A 2.3.2 作为常微分方程大范围渐近稳定的充分条件,证明了算法的大范围收敛性. ODE 法的不足是事先假定算法有界,也比较繁琐,要求回归函数连续,且不能在 A 2.3.2 不严格满足时使用,不易用于算法稳健性分析. 本节不用 ODE 法,直接用 Lyapunov 函数的性质,在算法有界的假设下证明收敛性. 我们将证明比定理 2.3.3 更强一些的结

果.用

$$d(S_1,S_2)=\inf\{\|x-y\|:x\in S_1,y\in S_2\},\tag{2.4.1}$$

表示欧氏空间中两个集合 S_1,S_2 间的距离.引入条件组 A 2.4.

A 2.4.0 函数 $h(\cdot):R^d\to R^d$,是 Borel 可测,在有界集上有界,当 $\theta\in J$ 时,$h(\theta)=0$.

A 2.4.1 同 A 2.3.1.

A 2.4.2 (a) 存在二次连续可微函数 $V(\theta)$(不一定非负):$R^d\to R$,对任意 $\Delta>\delta>0$,有

$$\sup_{\Delta\geqslant d(\theta,J)\geqslant\delta}h^\tau(\theta)V_\theta(\theta)<0.\tag{2.4.2}$$

(b) $V(J)=\text{const}$;或对于任意 θ,只要 $f(\theta,J)>0$,必有 $d(V(\theta),V(J))>0$,这里

$$V(J)=\{y:y=V(\theta),\theta\in J\},$$

记

$$m(k,T)=\max\left\{m:\sum_{i=k}^{m}\gamma_i\leqslant T\right\}.\tag{2.4.3}$$

A 2.4.3 当 $\{\theta_{n_k}\}$ 收敛时,有

$$\lim_{T\to0}\limsup_{k\to\infty}\frac{1}{T}\left\|\sum_{i=n_k}^{m(n_k,T_k)}\gamma_i\varepsilon_{i+1}\right\|=0,\quad T_k\in[0,T].\tag{2.4.4}$$

注 2.4.1 当 $h(\cdot)$ 连续时,(2.4.2)等价于 $h^\tau(\theta)V_\theta(\theta)<0,\ \forall\,\theta\notin J$;当(2.4.4)成立时,$\gamma_{n_k}\varepsilon_{n_k+1}\to0,k\to\infty$.

注 2.4.2 与上节条件比较,现在不要求 $h(\cdot)$ 连续,且 $h(\cdot)$ 的零点不一定是单点,可以是一个集合 J.当 $h(\cdot)$ 连续,且 $J=\theta^0$ 时,显然(2.4.2)等价于(2.3.5),而且 A 2.4.2(b)一定成立.我们也不要求 $\|\theta\|\to\infty$ 时,$V(\theta)\to\infty$.此外,当 A 2.3.3 成立时,A 2.4.3 一定成立.

如果对任意 $i,n_k<i<m_k,\delta_1<V(\theta_i)<\delta_2,V(\theta_{n_k})\leqslant\delta_1,V(\theta_{m_k})\geqslant\delta_2$,成立,就称 $V(\theta_{n_k}),\cdots,V(\theta_{m_k})$ 穿越区间$[\delta_1,\delta_2]$.

定理 2.4.3 设对某个 ω 条件 A 2.4.0~A 2.4.3 成立,取定初值 θ_0,由算法(2.1.4)定义的 θ_n 有界,那么对此 $\omega,d(\theta_n,J)\to0,n\to\infty$.

证明 先注意,当$\{\theta_n\}$有界时,在 A 2.4.0 和 A 2.4.3 条件下,对$\{\theta_n\}$的任一收敛子列$\{\theta_{n_k}\}$可找到 $c>0$ 和 $T_1>0$,使得对任意 $T\in[0,T_1]$,存在 k_T,当 $k\geqslant k_T,n_k\leqslant m\leqslant m(n_k,T)$时,有

$$\|\theta_m-\theta_{n_k}\|\leqslant cT,\tag{2.4.5}$$

先证明

$$\lim_{n\to\infty} d(V(\theta_n), V(J)) = 0, \tag{2.4.6}$$

令

$$V_1 = \liminf_{n\to\infty} V(\theta_n) \leqslant \limsup_{k\to\infty} V(\theta_n) = V_2,$$

(1)若 $V_1 = V_2 := V$，且 $\lim_{n\to\infty} d(V(\theta_n), V(J)) = d(V, V(J)) > 0$. 由于 $\{\theta_n\}$ 有界，可取子列 $\{\theta_{n_k}\}$ 收敛到某个 $\bar\theta$，从而

$$d(V(\bar\theta), V(J)) = \lim_{k\to\infty} d(V(\theta_{n_k}), V(J)) > 0,$$

故 $d(\bar\theta, J) := \delta > 0$，取 T 充分小，由此及(2.4.5)式及 $\theta_{n_k} \to \bar\theta, (k\to\infty)$ 知，对充分大的 k，当 $n_k \leqslant m \leqslant m(n_k, T)$ 时，

$$d(\theta_m, J) \geqslant \delta/2, \tag{2.4.7}$$

用中值公式及(2.4.5)知，存在 ξ：$\|\xi - \theta_{n_k}\| \leqslant cT$，使

$$\begin{aligned} & V(\theta_{m(n_k,T)+1}) - V(\theta_{n_k}) \\ &= (\theta_{m(n_k,T)+1} - \theta_{n_k})^\tau V_x(\bar\theta) + (\theta_{m(n_k,T)+1} - \theta_{n_k})^\tau (V_x(\xi) - V_x(\bar\theta)), \end{aligned} \tag{2.4.8}$$

由于 $\theta_{n_k} \to \bar\theta$，当 k 充分大时，$\|\xi - \bar\theta\| \leqslant 2cT$，从(2.4.5)知，$T\to 0$ 时，(2.4.8)中最后一式的数量级为 $o(T)$，另外，由(2.1.2)及(2.1.4)及(2.4.8)知

$$\begin{aligned} V(\theta_{m(n_k,T)+1}) - V(\theta_{n_k}) &= \sum_{i=n_k}^{m(n_k,T)} \gamma_i y_{i+1}^\tau V_\theta(\bar\theta) + o(T) \\ &= \sum_{i=n_k}^{m(n_k,T)} \gamma_i h^\tau(\theta_i) V_\theta(\theta_i) \\ &\quad + \sum_{i=n_k}^{m(n_k,T)} \gamma_i h^\tau(\theta_i)(V_\theta(\bar\theta) - V_\theta(\theta_i)) \\ &\quad + \sum_{i=n_k}^{m(n_k,T)} \gamma_i V_\theta^\tau(\bar\theta)\varepsilon_{i+1} + o(T), \end{aligned} \tag{2.4.9}$$

从(2.4.3)、(2.4.5)及 $V_\theta(\cdot)$ 的连续性知，上式右端第 2 项为 $o(T)$，用条件 A 2.4.3 知，第 3 项的范数，当 $k\to\infty$ 时，为 $o(T)$. 由 $\{\theta_n\}$ 的有界性，利用条件(2.4.2)及(2.4.7)，从(2.4.9)知，存在 $\alpha>0$，及充分小的 $T>0$，只要 k 充分大，就有

$$V(\theta_{m(n_k,T)}) - V(\theta_{n_k}) \leqslant -\alpha T, \tag{2.4.10}$$

令 $k\to\infty$，得 $0 \leqslant -\alpha T$，故(2.4.6)成立.

(2)设 $V_1 < V_2$，且 V_1, V_2 中至少有一个不属于 $\overline{V}(J)$，不妨设 $V_1 \notin \overline{V}(J)$

($\overline{V}(J)$是 $V(J)$的闭包).那么 $d(V_1,\overline{V}(J))>0$,存在 $\varepsilon>0$,使 $\delta_1:=V_1+\varepsilon<\delta_2:=V_2-\varepsilon$,且 $d(\delta_1,\overline{V}(J))>0$,从 V_1,V_2 的定义知,$V(\theta_n)$无穷次穿越$[\delta_1,\delta_2]$,即存在整数对列$\{n_k,m_k\}$,$n_k<m_k<n_{k+1}$,使对任意 i,$n_k<i<m_k$,$\delta_1<V(\theta_i)<\delta_2$,$V(\theta_{n_k})\leqslant\delta_1$,$V(\theta_{m_k})\geqslant\delta_2$ 成立.从 $\|\theta_{n_k}\|\leqslant c$,A 2.4.0 及注 2.4.1 知

$$\theta_{n_k+1}-\theta_{n_k}=\gamma_{n_k}(h(\theta_{n_k}))+\varepsilon_{n_k+1}\to 0,\quad k\to\infty,$$

但是 $V(\theta_{n_k+1})>\delta_1\geqslant V(\theta_{n_k})$,由于 $V(\cdot)$连续,故 $V(\theta_{n_k})\to\delta_1$,$k\to\infty$.从子列$\{\theta_{n_k}\}$中选取子列(仍然记为$\{\theta_{n_k}\}$)收敛到某个 $\bar{\theta}$,从而有

$$d(V(\bar{\theta}),V(J))=\lim_{n\to\infty}d(V(\theta_{n_k}),V(J))=d(\delta_1,V(J))>0,$$

故 $d(\bar{\theta},J):=\delta>0$.以下如同(1)中一样地进行讨论也可得到(2.4.10).另外,由于对任意 i,$n_k<i<m_k$,$V(\theta_{n_k})\leqslant\delta_1$,$V(\theta_{m_k})\geqslant\delta_2$,$\delta_1<V(\theta_i)<\delta_2$ 成立,而且从(2.4.3)知,对充分小的 T,有 $m(n_k,T)<m_k$,即

$$V(\theta_{m(n_k,T)})-V(\theta_{n_k})\geqslant 0,$$

这与(2.4.10)式矛盾.故 V_1,V_2 均属于 $\overline{V}(J)$,即(2.4.6)成立.

现利用条件 A 2.4.2 之(b)来证明 $d(\theta_n,J)\to 0$

(1)设对任意 $\theta\in J$,$V(\theta)=v$,根据(2.4.6)知 $V(\theta_n)\to v$,若假设存在子列$\theta_{n_k}\to\bar{\theta}$,由(1)的证明知道,必须有$d(\bar{\theta},J)=0$.由于$\theta_{n_k}$的任意性推出 $d(\theta_n,J)\to 0$.

(2)设对任意 θ,只要 $d(\theta,J)>0$,就有 $d(V(\theta),V(J))>0$,又设 θ_{n_k}为 θ_n 的任一收敛子列,$\theta_{n_k}\to\bar{\theta}$,从(2.4.13)知 $d(V(\bar{\theta}),V(J))=0$,$d(\bar{\theta},J)=0$,故 $d(\theta_n,J)\to 0$.

下面定理适当加强对 h 的要求,但是去掉了 Lyapunov 函数的存在性条件 A 2.4.2.

定理 2.4.4 设 $f(\cdot)$二次连续可微,$\sup\limits_{y\in R^l}f(y)\leqslant f(\theta)$,$\theta\in J$,$J$ 为有界集($f(\theta)=\text{const}$,$\theta\in J$)或记 $h(\theta)=f_\theta(\theta)$,$h(\theta)=0$,$\theta\in J$,还假设条件 A 2.4.1 及 A 2.4.3 成立,且对取定的初值 θ_0,由算法(2.1.4)定义的 θ_n 有界,那么 $d(\theta_n,J)\to 0$.

证明 根据定理 2.4.3 只需证明存在满足 A 2.4.2 的 $V(\theta)$.取 $V(\cdot)=-F(\cdot)$,那么

$$h^\tau(\theta)V_\theta(\theta)=-\|h(\theta)\|^2,$$

由于 $V(\theta)$在 J 上取常值,故 A 2.4.2 成立.

定理 2.4.5 在定理 2.4.3 及 2.4.4 中把 A 2.4.1 加强为

A 2.4.1′　γ_n 非增，$\gamma_n > 0, \gamma_n \to 0, \sum_n \gamma_n = \infty$，且存在常数 μ，使对任意 $n \geqslant 1$，

$$\gamma_{n+1}^{-1} - \gamma_n^{-1} \leqslant \mu, \tag{2.4.11}$$

把 A 2.4.3 改为

A 2.4.3′　　$\varepsilon_n = e_n + v_n, v_n \to 0, \quad \sum_{i=1}^{n} e_{i+1} \to 0,$

其他条件不变，那么两个定理的结论仍然成立.

证明　由于 $v_n \to 0$，故若能证明

$$\sum_{i=n_k}^{m} \gamma_i e_{i+1} \to 0, \quad n_k \leqslant m \leqslant m(n_k, T), \quad k \to \infty, \tag{2.4.12}$$

那么 A 2.4.3 成立，从而定理成立.

当 A 2.4.3′成立时，由(2.4.11)知，对 $m: n_k \leqslant m \leqslant m(n_k, T)$，有

$$\begin{aligned}\left\| \sum_{i=n_k}^{m} \gamma_i e_{i+1} \right\| &= \left\| \gamma_m \sum_{i=1}^{m} e_{i+1} - \gamma_{n_k} \sum_{i=1}^{n_k-1} e_{i+1} + \sum_{i=n_k}^{m-1} (\gamma_i - \gamma_{i+1}) \sum_{j=1}^{i} e_{j+1} \right\| \\ &\leqslant \gamma_m \left\| \sum_{i=1}^{m} e_{i+1} \right\| + \gamma_{n_k-1} \left\| \sum_{i=1}^{n_k-1} e_{i+1} \right\| \\ &\quad + \mu \sum_{i=n_k}^{m-1} \gamma_{i+1} \left\| \gamma_i \sum_{j=1}^{j} e_{j+1} \right\| \to 0, \quad k \to \infty.\end{aligned}$$

第三章　具有局部有界矩随机逼近算法的几乎必然收敛性

本章讨论形式非常一般的随机逼近算法的行为(由"平均"微分方程的解来逼近和渐近分析).在下一章讨论它们的应用. §3.1 给出记号和一般的假设. §3.2 和 §3.3 包含了在后面 §3.4 到 §3.8 需要的一些准备工作.

§3.1　一般算法的引进

3.1.1　算法模型

本章考虑的算法模型具有形式

$$\theta_{n+1} = \theta_n + \gamma_{n+1}H(\theta_n, X_{n+1}) + \gamma_{n+1}^2\rho_{n+1}(\theta_n, X_{n+1}), \qquad (3.1.1)$$

其中 θ_n 在 R^d 中变化,状态向量 X_n 位于 R^k 或者在 R^k 的一个子集中. H 和 ρ_n 是从 $R^d \times R^k$ 到 R^d 的两个函数.

假定随机变量 $\theta_0, X_0, \cdots X_n, \cdots$ 是定义在概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 上, $\mathscr{F}_n$ 表示由随机变量 $\theta_0, X_0, \cdots X_n$ 生成的事件 σ 域, $\mathscr{B}(R^k)$ 是 R^k 的 Borel 集全体.我们将总使用下面的假设

(A.1) $(\gamma_n)_{n\in N}$ 是一个正实数不增序列,满足 $\sum\limits_n \gamma_n = \infty$.

(A.2) 存在 R^k 上转移概率族 $\{\Pi_\theta = \Pi_\theta(x, A)$: $x \in R^k$, $A \in \mathscr{B}(R^k)$, $\theta \in R^d\}$,使得 $\forall A \in \mathscr{B}(R^k)$,有

$$P[X_{n+1} \in A \mid \mathscr{F}_n] = \Pi_{\theta_n}(X_n, A). \qquad (3.1.2)$$

上面式子蕴涵着,对任何 Borel 函数 $g(\theta, x)$(或是正的,或满足 $E|g(\theta_n, X_{n+1})| < \infty$),有

$$E\{g(\theta_n, X_{n+1}) \mid \mathscr{F}_n\} = \int g(\theta_n, x)\Pi_{\theta_n}(X_n, \mathrm{d}x). \qquad (3.1.3)$$

公式(3.1.3)表明随机变量

$$\int g(\theta_n(\omega), x)\Pi_{\theta_n}(X_n(\omega), \mathrm{d}x)$$

是 $g(\theta_n, X_{n+1})$ 关于 $\mathscr{F}_n$ 的条件期望的一个版本.假设(A.2)说明二元列 $(X_n, \theta_n)_{n\geqslant 0}$ 是一马尔可夫过程,它的转移概率依赖于 n(因为 γ_n 和 ρ_n 依赖 n),因此它是非时齐的马尔可夫过程.如果 $\gamma_n = \gamma$(具有常数步长)和 $\rho_n = \rho$,则是时

齐的.

记号:

a. $P_{x,a}$表示在初始条件$X_0=x,\theta_0=a$下,$(X_n,\theta_n)_{n\geqslant 0}$的分布.

b. 如果更明确地,对于给定的序列$(\gamma_n,\rho_n)_{n\geqslant 0}$,$P_{x,a}^{(\gamma_n,\rho_n,n\geqslant 0)}$表示具有初始条件$X_0=x,\theta_0=a$时,$(X_n,\theta_n)_{n\geqslant 0}$的分布,那么$(X_{n+k},\theta_{n+k})_{k\geqslant 0}$关于$\mathscr{F}_n$的条件分布是$P_{x,a}^{(\gamma_{n+k},\rho_{n+k},k\geqslant 0)}$.

c. 把轨迹$n\to\theta_n$表示为连续时间过程,在以后是有用的.为此目的,令

$$t_0=0,t_1=\gamma_1,\cdots,t_n=\sum_{i=1}^{n}\gamma_i, \tag{3.1.4}$$

$$\theta(t)=\sum_{k\geqslant 0}I(t_k\leqslant t<t_{k+1})\theta_k, \tag{3.1.5}$$

其中$I(A)$表示集合A的示性函数(常用I_A表示).因此在时间t_n和t_n+T之间对$\theta(t)$行为的研究可化归为对n和$m(n,T)$之间的整数k的θ_k行为的研究,其中

$$m(n,T)=\inf\{k:k\geqslant n,\gamma_{n+1}+\cdots+\gamma_{k+1}\geqslant T\}. \tag{3.1.6}$$

为简单起见,我们记

$$m(T)=m(0,T). \tag{3.1.7}$$

d. f_θ表示函数$f(x,\theta):R^k\times R^d\to R$,关于$\theta$的偏导数,而$\Pi_\theta f_\theta$表示函数

$$x\to\int f(y,\theta)\prod_{\theta}(x,\mathrm{d}y).$$

3.1.2　例子

例 3.1.1　条件线性动力系统算法

在这样的算法中,状态向量$(X_n)_{n\geqslant 0}$是按照下面递归式演化

$$X_{n+1}=A(\theta_n)X_n+b(\theta_n)W_{n+1}, \tag{3.1.8}$$

其中$(W_n)_{n\geqslant 0}$是独立同分布随机变量列,$A(\theta)$和$B(\theta)$是θ的矩阵值函数.

例 3.1.2　独立线性动力系统算法

在例1中当A和B是不依赖于θ的矩阵时出现这种情况.

例 3.1.3　递归决策反馈均衡器(recursive decision-feedback equaliser)(参见文献[10]第一部分的1.3.2.1小节)

递归决策反馈均衡器情形导出一个状态向量$\xi_n^{\mathrm{T}}=(Y_n^{\mathrm{T}},\eta_n^{\mathrm{T}})$使得

$$\begin{aligned}Y_{n+1}&=AY_n+BW_{n+1},\\ \eta_{n+1}&=f(\theta_n,Y_{n+1},\eta_n),\end{aligned} \tag{3.1.9}$$

其中A和B不依赖于θ,$(W_n)_{n>0}$是独立同分布随机变量列.

例 3.1.4 Robbins-Monro 算法

把这里提出的一般理论和随机算法的经典理论 Robbins-Monro 算法结合起来是非常重要的. 这一理论下的所有算法具有形式(3.1.1),并且满足假设(A.1),(A.2)和下面的 Robbins-Monro 假设

(RM):对所有的 x,有 $\Pi_\theta(x,\mathrm{d}z)=\mu_\theta(\mathrm{d}z)$,其中 $\mu_\theta(\mathrm{d}z)$ 是 R^k 上的一个概率分布.

3.1.3 关于 H,ρ_n 和 Π 的一般假设

我们将经常用 H_θ 表示函数 $x\to H(\theta,x)$,并不表示偏导数. 我们总假定 D 是 R^d 中一开集,函数 H 和 ρ_n 满足:

(A.3) 对 D 的任何一个紧子集 Q,存在常数 C_1,C_2,q_1,q_2(依赖于 Q),使得对所有的 $\theta\in Q$ 和对所有的 n 有

(i) $|H(\theta,x)|\leqslant C_1(1+|x|^{q_1})$.

(ii) $|\rho_n(\theta,x)|\leqslant C_2(1+|x|^{q_2})$.

在上面公式中,要明显地表达依赖于Q时,我们将记为$C_i(Q)$或者$q_i(Q)$.

我们引入的下一个基本假设似乎有点"抽象",但是后面的叙述和应用中将发现验证这个条件是研究算法的关键.

(A.4) 存在一个D上的函数h,对每一$\theta\in D$存在一个R^k上的函数$\nu_\theta(\cdot)$使得

(i) 在 D 上 h 满足局部 Lipschitz 条件.

(ii) 对所有的 $\theta\in D$,$(I-\Pi_\theta)\nu_\theta=H_\theta-h(\theta)$.

(iii) 对 D 的所有紧子集Q,存在常数 $C_3,C_4,q_3,q_4,\lambda\in[1/2,1]$使得对所有的 $\theta,\theta'\in Q$,

$$|\nu(\theta,x)|\leqslant C_3(1+|x|^{q_3}). \tag{3.1.10}$$

$$|\Pi_\theta\nu_\theta(x)-\Pi_{\theta'}\nu_{\theta'}(x)|\leqslant C_4|\theta-\theta'|^\lambda(1+|x|^{q_4}). \tag{3.1.11}$$

关于(A.4)的注:

a. 因为函数$\nu_\theta(\cdot)$,$H_\theta(\cdot)$,$h(\theta)$取值于R^d. 条件(A.4-ii)蕴涵着对每个$i=1,\cdots,d$ 有

$$(I-\Pi_\theta)\nu_\theta^i=H_\theta^i-h^i(\theta),$$

其中上标 i 表示R^d 中第i 个坐标.

b. 我们经常在例子中为了检验(A.4),将证明存在一个在 D 上满足局部 Lipschitz 条件的函数 h,且对任何 $\theta\in D$,存在 R^k 上的一个函数ω_θ 使得

$$(I-\Pi_\theta)\omega_\theta=\Pi_\theta H_\theta-h(\theta), \tag{3.1.12}$$

而且，对 D 上任何紧子集 Q，存在常数 $C'_3, C_4, q'_3, q_4, \lambda$ 使得

$$|\omega_\theta(x)| \leqslant C'_3(1 + |x|^{q'_3}), \tag{3.1.13}$$

$$|\omega_\theta(x) - \omega_{\theta'}(x)| \leqslant C_4 |\theta - \theta'|^\lambda (1 + |x|^{q_4}). \tag{3.1.14}$$

事实上，只需置

$$\nu_\theta = \omega_\theta + H_\theta - h(\theta). \tag{3.1.15}$$

就得到满足(A.4-i)的 ν_θ 和 h. 那么显然 $\Pi_\theta \nu_\theta = \omega_\theta$，进而由(1.1.14)得(1.1.11)，由(A.3-i)和(1.1.13)导出性质(1.1.10).

c. 关于(A.4)的重要性，注意如果对于所有的 θ，具有转移概率 Π_θ 的马尔可夫链是正常返的，具有不变概率 Γ_θ，并且如果我们置

$$h(\theta) = \int H_\theta(y) \Gamma_\theta(\mathrm{d}y) \tag{3.1.16}$$

(或者更简明地 $\Gamma_\theta H_\theta$)，则函数 $H_\theta - h(\theta)$ 关于 Γ_θ 的积分是零，因此被称为 Poisson 方程的(A.4-ii)有一个解 ν_θ. 而且对大多数情形，当下式右边级数收敛时，这个解可以被表示成下面形式

$$\nu_\theta(y) = \sum_{k \geqslant 0} \Pi_\theta^k (H_\theta - h(\theta))(y), \tag{3.1.17}$$

(参见第四章). 在应用中 $h(\theta)$ 的存在性常来源于不变测度 Γ_θ 的存在性，特别是当对于一个“充分丰富”的 R^n 上函数集合中的 g 有

$$\Gamma_\theta g = \lim_{n \to \infty} \Pi_\theta^n g.$$

有意思的是，甚至当 H_θ 不是正则的(比如它关于 θ 是不连续的)，对于充分“正则化”的核 Π_θ，通过表达式(1.1.17)，$\Pi_\theta^n (H_\theta - h(\theta))$，$n \geqslant 1$ 各项的正则性隐含着性质(1.1.11).

d. 这里给出的随机算法的研究其主要思想是基于(A.4)得到非常一般的结果，并且对于具体算法的研究化归为验证这个条件(A.4).

3.1.4　例子(续 3.1.2)

例 3.1.5　这是算法(3.1.8). 假设

$$E|W_n|^q = \bar{\nu}_q < \infty. \tag{3.1.18}$$

如果我们记 $\prod_{i=l}^{m} A_i = A_m A_{m-1} \cdots A_l$，那么公式(3.1.18)给出

$$X_{n+1} = \prod_{i=0}^{n} A(\theta_i) X_0 + \sum_{i=0}^{n-1} \left\{ \prod_{i=k+1}^{n} A(\theta_i) \right\} B(\theta_k) W_{k+1} + B(\theta_n) W_{n+1}. \tag{3.1.19}$$

我们假设

$$\sup_{\theta \in Q} |B(\theta)| \leqslant M. \tag{3.1.20}$$

暂且还假设

$$\sup_{\theta\in Q}|A(\theta)|\leqslant\rho<1. \tag{3.1.21}$$

现在我们看到对于任何 R^k 上函数 g，每当下式右边期望存在，即使得 $|g(x)|\leqslant C(1+|x|^q)$时，

$$\Pi_\theta g(x)=E\{g(A(\theta)x+B(\theta)W_1)\}. \tag{3.1.22}$$

类似地，对于任意 n

$$\Pi_\theta^n g(x)=E\left\{g\left(A^n(\theta)x+\sum_{k=0}^{n-1}A^{n-k}(\theta)B(\theta)W_{k+1}\right)\right\},$$

根据($W_k,k=1,\cdots,n$)是同分布的，我们可以写

$$\Pi_\theta^n g(x)=E\left\{g\left(A^n(\theta)x+\sum_{k=1}^{n}A^k(\theta)B(\theta)W_k\right)\right\}. \tag{3.1.23}$$

由(3.1.18)，(3.1.20)和(3.1.21)给出的随机变量序列

$$\left(A^n(\theta)x+\sum_{k=1}^{n}A^k(\theta)B(\theta)W_k\right)_{n\geqslant0},$$

在 L^q 中收敛到

$$U_\infty(\theta)=\sum_{k=1}^{\infty}A^k(\theta)B(\theta)W_k.$$

因此对于任何满足 $|g(x)|\leqslant C(1+|x|^q)$的 Borel 函数 g，有

$$\lim_{n\to\infty}\Pi_\theta^n g(x)=E\{g(U_\infty)\},$$

这说明不变测度 Γ_θ 的存在性．于是我们有(如果 $q_1\leqslant q$)

$$h(\theta)=\int H_\theta(y)\Gamma_\theta(\mathrm{d}y)=E(H_\theta(U_\infty(\theta))),$$

且 Poisson 方程(A.4-2)的解 ν_θ 的存在性可以通过联合考虑级数(3.1.17)和(3.1.23)得到(参见第四章)．

因此我们知道如果 $A(\theta)$和 $B(\theta)$关于 θ 是局部 Lipschitz 函数，则对于任何 Lipschitz函数 g，由(3.1.23)给出的表达式 $\Pi_\theta^n g(x)$说明对于任何 x，$\Pi_\theta^n g(x)$是 θ 的 Lipschitz 函数．如果函数 $H_\theta(y)$关于 θ 和 y 的正则的，那么验证(A.4)的全部假设是不困难的．关于这一点，我们将在第四章中给出更加详细的讨论．这里我们将说明在关于 $A(\theta)$和 H 的较少严厉的条件下，(A.4-ii)成立．(3.1.21)将被 $A(\theta)$的特征值一致严格小于 1 的条件所替代；如果 W_k 的密度是充分正则的，H 可以不必连续．

例 3.1.6 Robbins-Monro 算法(参见例 3.1.4)

因为 $\Pi_\theta(x,A)=\mu_\theta(A)$，条件(A.4)可以大大地简化．我们假设对于任何 θ 积分

$$h(\theta)=\int H(\theta,x)\mu_\theta(\mathrm{d}x), \tag{3.1.24}$$

存在，则 $\nu(\theta,x)=H(\theta,x)$ 满(A.4-ii)，并且 $\Pi_\theta\nu(\theta,x)=h(\theta)$ 是不依赖于 x. 因此整个的(A.4)能够由如下惟一的假设得出. 由(3.1.24)定义的 h 是局部 Lipschitz 的. 实际上，我们可以直接研究 RM 算法，而不需要运用(A.4)(参见下面的 3.3.7 节).

在本章我们将考虑这样一种情况，即在给定阶 q 下，状态向量 X_n 的 q 阶矩关于 n 有界，但是至少 θ_n 停留在某一紧集内. 我们将使用矩有界性，来导出 L^2 上界，并直接得到包含了本书所考虑的大多数应用的结果.

首先我们有"局部有界性"假设

(A.5)　对于 D 的任何紧子集 Q 和任何 $q>0$，存在 $\mu_q(Q)<\infty$，使得对任何的 $n,x\in R^k,a\in R^d$ 有

$$E_{x,a}\{I(\theta_k\in Q,k\leqslant n)(1+|X_{n+1}|^q)\}\leqslant\mu_q(Q)(1+|x|^q). \tag{3.1.25}$$

注　(1)如果(3.2.1)对 q 是真的，则对 $q'<q$ 也是真的，带有

$$\mu_{q'}(Q)\leqslant 2^{(q-q')q'/q}\mu_q(Q).$$

(2)在(A.5)的定义中，不等式(3.2.1)被假设对全部 $q>0$ 成立. 事实上，在本章的证明中，我们将始终使用一个较弱的假设，即只要对充分大的 q(比在(A.3)和(A.4)中，给出的指数 q_i 的函数大)，(3.2.1)是有效的.

例 3.1.7　对算法(3.1.8)，公式(3.1.19)和假设(3.1.18)，(3.1.20)和(3.1.21)隐含，对充分大的 n 有

$$E\{I(\theta_k\in Q,k\leqslant n)|X_{n+1}|^q\}\leqslant E\{[\rho^n|x|+\sum_{k=0}^{n}\rho^{n-k}M|W_{k+1}|^q]\}$$

$$\leqslant C_q\{|x|^q+\sum_{k=0}^{n}(\rho^{n-k}M)^q\bar{\nu}_q\},$$

其中 C_q 是一个适当的常数，进而条件(A.5)成立.

例 3.1.8　在上例中，如果 A 和 B 都是不依赖于 θ 的，则有比(3.1.25)更强的不等式

$$E\{|X_{n+1}|^q\}\leqslant\mu_q(1+|x|^q).$$

§3.2　一般算法的分解

我们看到如果 γ_n 趋于零，算法 $\theta(t)$ 有遵循具有初始条件 $a=\theta_0$ 的微分方程

$$\bar{\theta}'=h(\bar{\theta}(t)) \tag{3.2.1}$$

的(确定性)解的趋势. 这是因为 $\bar{\theta}(t_n)$ 是接近(Euler 逼近)到

$$\bar{\theta}_{n+1} = \bar{\theta}_n + \gamma_{n+1}h(\bar{\theta}_n),$$
$$\bar{\theta}_0 = a. \tag{3.2.2}$$

的解和因为算法(3.1.1)可以被写成如下形式

$$\theta_{n+1} = \theta_n + \gamma_{n+1}h(\theta_n) + \varepsilon_n. \tag{3.2.3}$$

其中

$$\begin{aligned}\varepsilon_n &= \theta_{n+1} - \theta_n + \gamma_{n+1}h(\theta_n).\\ &= \gamma_{n+1}[H(\theta_n, X_{n+1}) - h(\theta_n) + \gamma_{n+1}\rho_{n+1}(\theta_n, X_{n+1})],\end{aligned} \tag{3.2.4}$$

对小的 γ_n 是一个小的波动.

因此,关于解(3.2.1)行为与算法行为的比较依赖于得到的波动 ε_n 的上界.更一般地,接下来,我们将需要下面表达式的上界

$$\varepsilon_n(\phi) = \phi(\theta_{n+1}) - \phi(\theta_n) - \gamma_{n+1}\phi'(\theta_n)h(\theta_n). \tag{3.2.5}$$

令 ϕ 是 $R^d \to R$ 的 C^2 函数,并具有有界的二阶导数.对于 D 的紧子集 Q,我们记

$$\begin{aligned} M_0(Q) &= \sup_{\theta\in Q}|\phi(\theta)|,\\ M_1(Q) &= \sup_{\theta\in Q}|\phi'(\theta)|,\\ M_2(Q) &= \sup_{\theta\in Q}|\phi''(\theta)|,\\ M_2 &= \sup_{\theta\in R^d}|\phi''(\theta)|,\end{aligned} \tag{3.2.6}$$

则存在一个矩阵 $R(\phi,\theta,\theta')$ 使得

$$\phi(\theta') - \phi'(\theta) - (\theta' - \theta)\phi(\theta) = R(\phi,\theta,\theta'). \tag{3.2.7}$$

并对任何的 $\theta,\theta' \in R^d$ 有

$$|R(\phi,\theta,\theta')| \leqslant M_2|\theta - \theta'|^2. \tag{3.2.8}$$

因此,对任何的 k

$$\begin{aligned}\varepsilon_k(\phi) &= \phi'(\theta_k)[\theta_{k+1} - \theta_k - \gamma_{k+1}h(\theta_k)] + R(\phi,\theta_k,\theta_{k+1})\\ &= \gamma_{k+1}\phi'(\theta_k)[H(\theta_k,X_{k+1}) - h(\theta_k)] + \gamma_{k+1}^2\phi'(\theta_k)\rho_{k+1}(\theta_k,X_{k+1})\\ &\quad + R(\phi,\theta_k,\theta_{k+1})\end{aligned} \tag{3.2.9}$$

和

$$|R(\phi,\theta_k,\theta_{k+1})| \leqslant \gamma_{k+1}^2 M_2|H(\theta_k,X_{k+1}) + \gamma_{n+1}\rho_{k+1}(\theta_k,X_{k+1})|^2. \tag{3.2.10}$$

如果(3.2.9)写成形式

$$\varepsilon_k(\phi) = \gamma_{k+1}\phi'(\theta_k)[H(\theta_k,X_{k+1}) - h(\theta_k)] + A_k^1.$$

利用(A.4-ii)有

$$\begin{aligned}&\phi(\theta_{k+1}) - \phi(\theta_k) - \gamma_{k+1}\phi'(\theta_k)h(\theta_k)\\ &= \gamma_{k+1}\phi'(\theta_k)[H(\theta_k,X_{k+1}) - h(\theta_k)] + A_k^1\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \gamma_{k+1}\phi'(\theta_k)\left[\nu_{\theta_k}(X_{k+1}) - \Pi_{\theta_k}\nu_{\theta_k}(X_{k+1})\right] + A_k^1 \\
&= \gamma_{k+1}\phi'(\theta_k)\left[\nu_{\theta_k}(X_{k+1}) - \Pi_{\theta_k}\nu_{\theta_k}(X_k)\right] \\
&\quad + \gamma_{k+1}\phi'(\theta_k)\left[\Pi_{\theta_k}\nu_{\theta_k}(X_k) - \Pi_{\theta_k}\nu_{\theta_k}(X_{k+1})\right] + A_k^1 \\
&= A_k^2 + A_k^3 + A_k^1.
\end{aligned}
$$

事实上,这一计算只适合于 $\theta_k \in D$,因为 h 只定义在 D 上.这就是我们对 D 上固定的紧子集 Q 引入下面定义的原因

$$
\tau = \tau(Q) = \inf(k:\theta_k \notin D). \tag{3.2.11}
$$

令

$$
\psi_\theta(x) = \phi'(\theta)\Pi_\theta\nu_\theta(x), \tag{3.2.12}
$$

则在 $\{\tau \geqslant n\}$ 上,对 $r < n$ 我们有

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=r}^{n-1}\varepsilon_k &= \sum_{k=r}^{n-1}(A_k^1 + A_k^2) + \sum_{k=r}^{n-1}\gamma_{k+1}(\psi_{\theta_k}(X_k) - \psi_{\theta_k}(X_{k+1})) \\
&= \sum_{k=r}^{n-1}(A_k^1 + A_k^2) + \gamma_{r+1}\psi_{\theta_r}(X_r) \\
&\quad + \sum_{k=r+1}^{n-1}\gamma_{k+1}(\psi_{\theta_k}(X_k) - \psi_{\theta_{k-1}}(X_k)) \\
&\quad + \sum_{k=r+1}^{n-1}(\gamma_{k+1} - \gamma_k)\psi_{\theta_{k-1}}(X_k) - \gamma_n\psi_{\theta_{n-1}}(X_n).
\end{aligned}
$$

因此我们有下列引理.

引理 3.2.1　对 $r < n$ 在 $\{\tau \geqslant n\}$ 上有

$$
\sum_{k=r}^{n-1}\varepsilon_k(\phi) = \sum_{k=r}^{n-1}\varepsilon_k^{(1)} + \sum_{k=r+1}^{n-1}\varepsilon_k^{(2)} + \sum_{k=r+1}^{n-1}\varepsilon_k^{(3)} + \sum_{k=r}^{n-1}\varepsilon_k^{(4)} + \eta_{n,r},
$$

其中

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_k^{(1)} &= \gamma_{n+1}\phi'(\theta_k)\left[\nu_{\theta_k}(X_{k+1}) - \Pi_{\theta_k}\nu_{\theta_k}(X_k)\right], \\
\varepsilon_k^{(2)} &= \gamma_{k+1}(\psi_{\theta_k}(X_k) - \psi_{\theta_{k-1}}(X_k)), \quad \psi_\theta(x) = \phi'(\theta)\Pi_\theta\nu_\theta(x), \\
\varepsilon_k^{(3)} &= (\gamma_{k+1} - \gamma_k)\psi_{\theta_{k-1}}(X_k), \\
\varepsilon_k^{(4)} &= \gamma_{k+1}^2\phi'(\theta_k)\rho_{k+1}(\theta_k, X_{k+1}) + R(\phi, \theta_k, \theta_{k+1}), \\
\eta_{n,r} &= \gamma_{r+1}\psi_{\theta_r}(X_r) - \gamma_n\psi_{\theta_{n-1}}(X_n).
\end{aligned}
$$

我们指出利用(A.1)和(A.4-iii)可以得出,对任何的 $\theta \in Q$

$$
\Pi_\theta\nu_\theta(x) = E_{x,\theta}(\nu_\theta(X_1)) = C_3E_{x,\theta}(1 + |X_1|^{q_3}) \leqslant C_3\mu_{q_3}(1 + |x|^{q_3}),
$$

即

$$
\sup_{\theta\in Q}|\Pi_\theta\nu_\theta(x)| \leqslant C_3\mu_{q_3}(1 + |x|^{q_3}). \tag{3.2.13}
$$

从(3.2.6),(3.1.10)和(3.1.11)可以得出

$$\sup_{\theta\in Q}|\psi_\theta(x)|\leqslant M_1C_3\mu_{q_3}(1+|x|^{q_3}),\tag{3.2.14}$$

$$\begin{aligned}&\sup_{\theta\in Q}|\psi_\theta(x)-\psi_{\theta'}(x)|\\&\leqslant M_1C_4(1+|x|^{q_4})|\theta-\theta'|^\lambda+M_2C_3\mu_{q_3}(1+|x|^{q_3})|\theta-\theta'|.\end{aligned}\tag{3.2.15}$$

§3.3 L^2 估计

本节的目的是证明下面命题3.3.6,它给出"扰动"的均方上界

$$\sup_{n\leqslant m\wedge\tau}\left|\sum_{k=0}^{n-1}\varepsilon_k(\phi)\right|.$$

(参见§3.2ε_k 的引入)其中 τ 是过程$\{\theta_n\}$离开紧集 Q 的时间.

在本节,Q 是一固定的紧集,出现在结果中的"常数"可能依赖于 Q,正如它们依赖于假设中的参数 C_i,μ_q,λ 以及同给定的函数ϕ关连的数$M_i(\phi)$(参见(3.2.6)).另一方面,固定 r,它们对于满足 $r_1\leqslant r$ 的序列$\{r_n;n\geqslant 0\}$是有效的.当它们不依赖于 Q,结果是明显的.

引理 3.3.1 存在一个常数 A_1 使得

$$E_{x,a}\left\{\sup_{n\leqslant m}I(n\leqslant\tau)\left|\sum_{k=0}^{n-1}\varepsilon_k^{(1)}\right|^2\right\}\leqslant A_1(1+|x|^{2q_3})\sum_{k=0}^{m-1}r_{k+1}^2.$$

这里使用(A.3)和(A.4)假设中的常数

$$A_1\leqslant\widetilde{A}_1\mu_{2q_3}(Q)M_1^2(Q)C_3^2(Q),$$

常数 $\widetilde{A}_1$ 不依赖于 Q. 进而,在$\{\tau=\infty\}$上,$\sum_{k=0}^{n-1}\varepsilon_k^{(1)}$,$a.s.$ 收敛,并且如果 $\sum r_{k+1}^2<\infty$,它还在 L^2 中收敛.

证明 设

$$z_n=\sum_{k=0}^{n-1}\gamma_{k+1}I(k+1\leqslant\tau)\phi'(\theta_k)\left[\Pi_{\theta_k}\nu_{\theta_k}(X_k)-\Pi_{\theta_k}\nu_{\theta_k}(X_{k+1})\right],$$

我们注意到

$$I(n\leqslant\tau)\left|\sum_{k=0}^{n-1}\varepsilon_k^{(1)}\right|\leqslant|z_n|.$$

因为

$$E\{I(k+1\leqslant\tau)\nu_{\theta_k}(X_{k+1})|\mathscr{F}_k\}=I(k+1\leqslant\tau)\Pi_{\theta_k}\nu_{\theta_k}(X_k),$$

所以$\{z_n\}$是一个鞅,并且因为条件期望在 L^2 中是一个压缩算子,故有

$$E\{I(k+1\leqslant\tau)\left|\phi'(\theta_k)\Pi_{\theta_k}\nu_{\theta_k}(X_k)\right|^2\}$$

$$\leqslant E\{I(k+1\leqslant\tau)|\phi'(\theta_k)\nu_{\theta_k}(X_{k+1})|^2\}.$$

$$E|z_n|^2=\sum_{k=0}^{n-1}\gamma_{k+1}^2E\Big\{I(k+1\leqslant\tau)\Big|\phi'(\theta_k)\Big(\Pi_{\theta_k}\nu_{\theta_k}(X_k)-\Pi_{\theta_k}\nu_{\theta_k}(X_{k+1})\Big)\Big|^2\Big\}$$

$$\leqslant 2M_1^2\sum_{k=0}^{n-1}\gamma_{k+1}^2E\{I(k+1\leqslant\tau)|\nu_{\theta_k}(X_{k+1})|^2\}$$

$$\leqslant K\sum_{k=0}^{n-1}\gamma_{k+1}^2E\{I(k+1\leqslant\tau)(1+|X_{k+1}|^{q_3})^2\}$$

$$\leqslant K\sum_{k=0}^{n-1}\gamma_{k+1}^2E\{I(k+1\leqslant\tau)(1+|X_{k+1}|^{2q_3})\}$$

$$\leqslant K\mu_{2q_3}(1+|x|^{2q_3})\sum_{k=0}^{n-1}r_{k+1}^2.$$

并且 $K\leqslant\overline{K}C_3^2M_1^2\mu_{2q_3}$，$\overline{K}$ 是不依赖于 Q.

然后引理的第一部分可从(Doob 不等式)

$$E\{\sup_{n\leqslant m}|z_n|^2\}\leqslant 4\sup_{n\leqslant m}E|z_n|^2\leqslant K(1+|x|^{2q_3})\sum_{k=0}^{m-1}r_{k+1}^2,$$

导出.第二部分被证明是因为在$(\tau=\infty)$有

$$\Big|\sum_{k=r}^{n-1}\varepsilon_k^{(1)}\Big|\leqslant|z_n-z_r|,$$

并且因为如果 $\sum r_{k+1}^2<\infty$，则鞅$\{z_n\}$，$a.s.$收敛并且在 L^2 中收敛.这是因为它在 L^2 中有界.

考虑下面各项时，我们注意到对 $i=2,3,4$ 有

$$E\Big\{\sup_{n\leqslant m}I(n\leqslant\tau)\Big|\sum_{k=0}^{n-1}\varepsilon_k^{(i)}\Big|^2\Big\}\leqslant E\Big\{\sum_{k=0}^{m\wedge\tau-1}|\varepsilon_k^{(i)}|^2\Big\}$$

$$=E\Big\{\sum_{k=0}^{m-1}|\varepsilon_k^{(i)}|I(k+1\leqslant\tau)\Big\}^2.$$

并约定 $\varepsilon_0^{(2)}=\varepsilon_0^{(3)}=0$.

引理 3.3.2 存在一个常数 A_2 使得对所有的 m 有

$$E_{x,a}\Big(\sum_{k=1}^{m\wedge\tau-1}|\varepsilon_k^{(2)}|\Big)^2\leqslant A_2(1+|x|^{s_1})\Big(\sum_{k=1}^{m-1}r_{k+1}^{1+\lambda}\Big)^2,$$

其中

$$s_1=\max(2q_4+2\lambda(q_1\vee q_2),2q_3+2(q_1\vee q_2)).$$

使用(A.3)，(A.4)和(A.5)，并记 $C_1(Q)+C_2(Q)\gamma_1$ 为 $\overline{C}(Q)$，则有

$$A_2\leqslant\widetilde{A}_2\mu_{s_3}(Q)[\overline{C}^{2\lambda}(Q)M_1^2(Q)C_4^2(Q)+\overline{C}^2(Q)M_2^2(Q)C_3^2(Q)],$$

其中 $\widetilde{A}_2$ 是不依赖于 Q 的常数.

证 我们使用(3.2.15),并注意到在 $\{k+1\leqslant\tau\}$ 上有

$$|\theta_k-\theta_{k-1}|\leqslant[C_1(Q)+C_2(Q)\gamma_1]\gamma_k(1+|X_k|^{q_1\vee q_2}),$$

$$E\Big(\sum_{k=1}^{m\wedge\tau-1}|\varepsilon_k^{(2)}|\Big)^2\leqslant K_1E\Big\{\sum_{k=1}^{m-1}\gamma_{k+1}^{1+\lambda}I(k+1\leqslant\tau)(1+|X_k|^{q_4+\lambda(q_3\vee q_2)})\Big\}^2$$
$$+K_2E\Big\{\sum_{k=1}^{m-1}\gamma_{k+1}^2I(k+1\leqslant\tau)(1+|X_k|^{q_3+(q_3\vee q_2)})\Big\}^2,$$

其中

$$K_1\leqslant A\overline{C}^{2\lambda}(Q)M_1^2(Q)C_4^2(Q),$$
$$K_2\leqslant A\overline{C}^2(Q)M_2^2(Q)C_3^2(Q)\mu_{q_3}^2,$$
$$\overline{C}(Q)=C_1(Q)+C_2(Q)\gamma_1.$$

A 只依赖于 q_1,q_2,q_3 和 q_4,使用 Schwartz 不等式,并且因为 $1+\lambda\leqslant2$,我们有

$$E\Big(\sum_{k=0}^{m\wedge\tau-1}|\varepsilon_k^{(2)}|\Big)^2$$
$$\leqslant\Big(\sum_{k=1}^{m-1}r_{k+1}^{1+\lambda}\Big)E\Big\{\sum_{k=1}^{m-1}\gamma_{k+1}^{1+\lambda}I(k+1\leqslant\tau)[\tau K_1(1+|X_k|^{2q_4+2\lambda(q_3\vee q_2)})$$
$$+K_2(1+|X_k|^{2q_3+2(q_3\vee q_2)})]\Big\},$$

使用(A.5)最终可以证明引理.

引理 3.3.3 存在一个正常数 A_3,使得对一切 m 有

$$E\Big(\sum_{k=0}^{m\wedge\tau-1}|\varepsilon_k^{(3)}|\Big)^2\leqslant A_3(1+|x|^{2q_3})r_1^2,$$

其中

$$A_3\leqslant\widetilde{A}_3M_1^2(Q)C_3^2(Q)\mu_{2q_3}^3(Q),$$

A_3 是一个不依赖于 Q 的常数.

证明 利用(3.2.14)我们可以得到

$$E\Big(\sum_{k=0}^{m\wedge\tau-1}|\varepsilon_k^{(3)}|\Big)^2$$
$$\leqslant KE\Big\{\sum_{k=1}^{m-1}(\gamma_k-\gamma_{k+1})I(k+1\leqslant\tau)(1+|X_k|^{q_3})\Big\}^2$$
$$\leqslant K\sum_{k=1}^{m-1}(\gamma_k-\gamma_{k+1})\sum_{k=1}^{m-1}(\gamma_k-\gamma_{k+1})E\{I(k+1\leqslant\tau)(1+|X_k|^{2q_3})^2\},$$

其中

$$K\leqslant M_1^2(Q)C_3^2(Q)\mu_{q_3}^3(Q),$$

因此从(A.5)有

$$E\Big(\sum_{k=0}^{m\wedge\tau-1}|\varepsilon_k^{(3)}|\Big)^2\leqslant K(1+|x|^{2q_3})r_1^2,$$

并且 $K\leqslant\widetilde{A}_3M_1^2(Q)C_3^2(Q)\mu_{2q_3}^3(Q)$.

引理 3.3.4 记 $s_2=\sup(4q_1,4q_2)$. 存在一个常数 A_4 使得对一切 m 有

$$E\Big(\sum_{k=0}^{m\wedge\tau-1}|\varepsilon_k^{(4)}|\Big)^2\leqslant A_4(1+|x|^{s_2})\Big(\sum_{k=0}^{m-1}r_{k+1}^2\Big)^2.$$

其中

$$A_4\leqslant\widetilde{A}_4\mu_{s_2}(Q)[C_2^2(Q)M_1^2(Q)+C_1^4(Q)+\gamma_1^4C_2^4(Q)],$$

$\widetilde{A}_4$ 是不依赖于 Q 的一个常数.

证明 我们有

$$|\varepsilon_k^{(4)}|\leqslant Kr_{k+1}^2(1+|X_{k+1}|^{s_1}).$$

根据(3.2.10)和(A.3), $s_1=\sup(2q_1,2q_2)$和

$$K\leqslant C_2(Q)M_1(Q)+M_2[C_1(Q)+\gamma_1C_2(Q)]^2.$$

所以

$$\begin{aligned}&E\Big(\sum_{k=0}^{m\wedge\tau-1}\varepsilon_k^{(4)}\Big)^2\\ \leqslant&K^2E\Big\{\sum_{k=0}^{m-1}\gamma_{k+1}^2I(k+1\leqslant\tau)(1+|X_{k+1}|^{s_1})\Big\}^2\\ \leqslant&K^2E\Big\{\Big(\sum_{k=0}^{m-1}\gamma_{k+1}^2\Big)\sum_{k=0}^{m-1}\gamma_{k+1}^2I(k+1\leqslant\tau)(1+|X_{k+1}|^{s_1})\Big\}.\end{aligned}$$

应用假设(A.5)便可证明引理 3.3.4.

引理 3.3.5 存在一个常数 A_5 使得

$$E_{x,a}\{\sup_{1\leqslant n\leqslant m}I(n\leqslant\tau)|\eta_{n,0}|^2\}\leqslant A_5(1+|x|^{2q_3})\sum_{k=0}^{m-1}r_{k+1}^2,$$

其中

$$A_5\leqslant\widetilde{A}_5M_1^2(Q)C_3^2(Q)\mu_{2q_3}^3(Q),$$

$\widetilde{A}_5$ 是不依赖于 Q 的常数. 进一步 $\eta_{n,0}$, $a.s.$ 收敛, 且当 $\sum r_{k+1}^2<\infty$ 时, 在 $\{\tau=\infty\}$ 上是 L^2 收敛.

证明

$$\begin{aligned}&|\psi_{\theta_0}(X_0)\gamma_1|^2\leqslant K(1+|x|^{2q_3})r_1^2,\\ &E\{\sup_{1\leqslant n\leqslant m}I(n\leqslant\tau)|\psi_{\theta_{n-1}}(X_n)\gamma_n|^2\}\\ \leqslant&KE\{\sup_{1\leqslant n\leqslant m}I(n\leqslant\tau)(1+|X_n|^{2q_3})r_n^2\},\end{aligned}$$

其中

$$K \leqslant \overline{K} M_1^2(Q) C_3^2(Q) \mu_{2q_3}(Q),$$

$\overline{K}$ 是不依赖于 Q 的常数. 据此

$$E\{\sup_{1 \leqslant n \leqslant m} I(n \leqslant \tau) |\eta_{n,0}|^2\} \leqslant KE\{\sum_{k=0}^{m-1} \gamma_{k+1}^2 I(k+1 \leqslant \tau)(1 + |X_k|^{2q_3})\}$$

$$\leqslant K\mu_{2q_3}^3 (1 + |x|^{2q_3}) \sum_{k=0}^{m-1} r_{k+1}^2.$$

这就证明了引理的第一部分. 最后,因为

$$E\{I_{\{\tau=\infty\}} |\psi_{\theta_{n-1}}(X_n)\gamma_n|^2\} \leqslant K\gamma_n^2(1 + |x|^{2q_3}) \leqslant K\mu_{2q_3}^3.$$

$$E\{I_{\{\tau \hat{=} \infty\}} \sum_n |\psi_{\theta_{n-1}}(X_n)\gamma_n|^2\} < \infty.$$

这隐含着 $\lim_{n\to\infty} \psi_{\theta_{n-1}}(X_n)\gamma_n = 0, a.s.$

命题 3.3.6 对 D 的任何紧子集 Q 和 R^d 上任何具有有界二阶导数的 C^2 函数 ϕ,存在常数 B_1, B_2 和 s 使得对一切 m

1. 我们有

$$E_{x,a}\{\sup_{n \leqslant m} I(n \leqslant \tau(Q)) |\sum_{k=0}^{n-1} \varepsilon_k(\phi)|\}^2$$

$$\leqslant B_1(1 + |x|^s)\left(1 + \sum_{k=0}^{m-1} r_{k+1}^{2\lambda}\right) \sum_{k=0}^{m-1} r_{k+1}^2. \tag{3.3.1}$$

其中 $\lambda \in [1/2, 1]$是假设(A.5)的常数;类似地假设(A.3),(A.4)和(A.5)中的常数使得

$$B_1 \leqslant \widetilde{B}_1(1 + \mu_s^3(Q))[M_1^4(Q) + C_1^4(Q) + C_2^4(Q) + C_3^4(Q) + \overline{C}^{4\lambda}(Q) C_4^4(Q)],$$

其中

$$\overline{C}(Q) = C_1(Q) + \gamma_1 C_2(Q),$$

$\widetilde{B}_1$ 不依赖于 Q.

最后我们可以取

$$s = \max(2q_4 + 2\lambda \max(q_1, q_2), 2q_3 + 2\max(q_1, q_2), 4q_1, 4q_2).$$

2. 如果 $\sum r_{k+1}^2 \leqslant 1$,则

(i) $$E_{x,a}\{\sup_{n \leqslant m} I(n \leqslant \tau(Q)) |\sum_{k=0}^{n-1} \varepsilon_k(\phi)|\}^2 \leqslant B_2(1 + |x|^s) \sum_{k=1}^{\infty} r_k^{1+\lambda}. \tag{3.3.2}$$

其中,对某个不依赖于 Q 的常数 C, $B_2 \leqslant CB_1$.

(ii) 在$\{\tau(Q) = \infty\}$上级数 $\sum_k \varepsilon_k(\phi)$, $a.s.$ 和 L_2 收敛.

证明 引理 3.3.1~3.3.5 告诉我们(3.3.1)的第一项是有界的,以本身

都是上有界的两项之和为上界,上界由下面形式给出

$$B(1+|x|^s)\sum_{k=0}^{m-1} r_{k+1}^2 \quad 或 \quad B(1+|x|^s)\Big(\sum_{k=0}^{m-1} r_{k+1}^{1+\lambda}\Big)^2,$$

命题的第一条为真.又因为

$$\Big(\sum_{k=0}^{m-1} r_{k+1}^{1+\lambda}\Big)^2 \leqslant \Big(\sum_{k=0}^{m-1} r_{k+1}^2\Big)\Big(\sum_{k=0}^{m-1} r_{k+1}^{2\lambda}\Big),$$

利用这些上界命题的第二条也容易得到.因此,我们有

推论 3.3.7　对所有的 $T>0$ 有

$$E_{x,a}\Big\{\sup_{n\leqslant m(T)} I(n\leqslant\tau(Q))\Big|\sum_{k=0}^{n-1}\varepsilon_k(\phi)\Big|\Big\}^2$$

$$\leqslant B_1(1+|x|^s)(1+T\gamma_1^{2\lambda-1})\sum_{k=1}^{m(T)} r_k^2 \tag{3.3.3}$$

注 3.3.8　Robbins-Monro 算法的情形

对这个算法扰动 $\varepsilon_{n+1}(\phi)$ 的分解能被大大地简化,因为

$$\varepsilon_k(\phi)=\gamma_{n+1}\phi'(\theta_k)[H(\theta_k,X_{k+1})-h(\theta_k)]+\varepsilon_k^{(4)}(\phi),$$

并且过程

$$Z_n=\sum_{k=0}^{n-1}\gamma_{n+1}\phi'(\theta_k)[H(\theta_k,X_{k+1})-h(\theta_k)]$$

是一个鞅.如同在引理 3.3.1 中一样,利用 Doob 不等式可以说明它是上有界的.在这种情形不必使用假设(A.4),因为这时假设(A.4)几乎都是平凡的(参见 3.1.4).

§3.4　通过常微分方程的解作算法的逼近

对于 $t\geqslant t_0$,$\bar\theta(t,t_0,a_0)$表示下面方程的解

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bar\theta(t)=h(\bar\theta(t)),\quad t\geqslant t_0,$$

$$\bar\theta(t_0)=a_0. \tag{3.4.1}$$

我们选择 $T>0$ 和 D 的两个紧子集 Q_1,Q_2 使得 $Q_1\subset Q_2$,满足

$$\forall a\in Q,\quad \forall t\leqslant T, d(\bar\theta(t;0,a),Q_2^c)\geqslant\delta_0>0. \tag{3.4.2}$$

这一条件只应用于微分方程(3.4.1)的解.它隐含着在 $T\geqslant t\geqslant 0$,环绕解 $\bar\theta(t;0,a)$的任何一个半径为 $\delta<\delta_0$ 的管子包含在 Q_2 中.

根据(A.4),存在常数 $L_1=L_1(Q_2)$,$L_2=L_2(Q_2)$使得

$$|h(\theta)|\leqslant L_1,|h(\theta)-h(\theta')|\leqslant L_2|\theta-\theta'|,\quad \forall\theta,\theta'\in Q_2, \tag{3.4.3}$$

对由(3.1.4)定义的 $t_n, t_{n+1} \leqslant T$ 有

$$\bar{\theta}(t_{n+1}) - \bar{\theta}(t_n) = \int_{t_n}^{t_{n+1}} h(\bar{\theta}(s))\mathrm{d}s$$

$$= \gamma_{n+1} h(\bar{\theta}(t_n)) + \alpha_n,$$

其中

$$|\alpha_n| \leqslant \gamma_{n+1}^2 L_2. \tag{3.4.4}$$

我们希望在$[0,T]$上比较$\theta(t)$和$\bar{\theta}(t;0,a)$或者更精确地说对由(3.1.7)给定的 $n \leqslant n(T)$,比较 θ_n 和$\bar{\theta}(t_n;0,a)$.

我们固定一个 a,$\theta_0 = a$ 并记$\bar{\theta}(t;0,a)$为 $\bar{\theta}(t)$.对 $\delta < \delta_0$ 考虑集合

$$\{\sup_{n \leqslant n(T)} |\theta_n - \bar{\theta}(t_n)| \geqslant \delta\}.$$

如果我们对 $\tau(Q)$的定义(参见(3.2.11)),令

$$\nu = m(T) \wedge \tau(Q_2), \tag{3.4.5}$$

该集合等于

$$\{(\sup|\theta_n - \bar{\theta}(t_n)|; n \leqslant \nu) \geqslant \delta\},$$

因为在时间 $n = \tau(Q_2)$,从(3.4.2),我们有$|\theta_n - \bar{\theta}(t_n)| \geqslant \delta$.像前面一样,记

$$\varepsilon_n = \theta_{k+1} - \theta_k - \gamma_{n+1} h(\theta_k), \tag{3.4.6}$$

应用(3.3.3)到坐标函数 $\phi_i(\theta) = \theta^i$,我们有

$$E_{x,a}\{\sup_{n \leqslant m(T)} I(n \leqslant \tau(Q_2)) \left|\sum_{k=0}^{n-1} \varepsilon_k\right|\}^2 \leqslant B(1 + |x|^s)(1 + T\gamma_1^{2\lambda-1}) \sum_{k=1}^{m(T)} r_k^2 \tag{3.4.7}$$

对某常数 B 和 s 成立.因为

$$\theta_r - \bar{\theta}(t_r) = \theta_{r-1} - \bar{\theta}(t_{r-1}) + \gamma_r(h(\theta_{r-1}) - h(\bar{\theta}(t_{r-1}))) + \varepsilon_{r-1} + \alpha_{r-1}.$$

$$\theta_r - \bar{\theta}(t_r) = \sum_{k=0}^{r-1} \gamma_{k+1}(h(\theta_k) - h(\bar{\theta}(t_k))) + \sum_{k=0}^{r-1} \varepsilon_k + \sum_{k=0}^{r-1} \alpha_k.$$

$$|\theta_r - \bar{\theta}(t_r)| \leqslant L_2 \sum_{k=0}^{r-1} \gamma_{k+1} |\theta_k - \bar{\theta}(t_k)| + \left|\sum_{k=0}^{r-1} \varepsilon_k\right| + L_2 \sum_{k=0}^{r-1} \gamma_{k+1}^2.$$

在$\{n \leqslant \nu\}$上,对 $r = 0,1,\cdots,n$ 我们有

$$|\theta_r - \bar{\theta}(t_r)| \leqslant L_2 \sum_{k=0}^{r-1} \gamma_{k+1} |\theta_k - \bar{\theta}(t_k)|$$

$$+ \sup_{n \leqslant m(T)} \left\{I(m \leqslant \nu) \left|\sum_{k=0}^{m-1} \varepsilon_k\right| + L_2 \sum_{k=1}^{m(T)} \gamma_k^2\right\}$$

$$\leqslant L_2 \sum_{k=0}^{r-1} \gamma_{k+1} |\theta_k - \bar{\theta}(t_k)| + U_1 + U_2.$$

引理 3.4.1 如果对 $r = 0,1,\cdots,n$,

$$\nu_r \leqslant \gamma_1 \sum_{i=1}^{r} \gamma_i \nu_{i-1} + \gamma_2, \nu_0 = 0,$$

其中 r_1, r_2, γ_i 为正数,则

$$\nu_n \leqslant \gamma_2 \exp\left\{\gamma_1 \sum_{i=1}^{n} \gamma_i\right\}.$$

证明　我们可以假定 $\gamma_1 = 1$. 令 $P(r)$表示性质

$$1 + \sum_{i=1}^{r} \gamma_i \exp\left\{\sum_{j=1}^{i-1} \gamma_j\right\} \leqslant \exp\left\{\sum_{i=1}^{r} \gamma_i\right\},$$

$$\nu_r \leqslant \gamma_2 \exp\left\{\sum_{i=1}^{r} \gamma_i\right\}, \tag{3.4.8}$$

则 $P(1)$简化为 $1 + \gamma_1 \leqslant \exp\gamma_1$ 和 $\nu_1 \leqslant \gamma_2$,这显然为真.

让我们假定 $P(r)$为真,则一方面有

$$\begin{aligned}
\exp\left\{\sum_{i=1}^{r+1} \gamma_i\right\} &= \exp\left\{\sum_{i=1}^{r} \gamma_i\right\} \exp\{\gamma_{r+1}\} \\
&\geqslant \exp\left\{\sum_{i=1}^{r} \gamma_i\right\} + \gamma_{r+1} \exp\left\{\sum_{i=1}^{r} \gamma_i\right\} \\
&\leqslant 1 + \sum_{i=1}^{r} \gamma_i \exp\left\{\sum_{j=1}^{i-1} \gamma_j\right\} + \gamma_{r+1} \exp\left\{\sum_{i=1}^{r} \gamma_i\right\} \\
&= 1 + \sum_{i=1}^{r+1} \gamma_i \exp\left\{\sum_{j=1}^{i-1} \gamma_j\right\}.
\end{aligned}$$

另一方面

$$\nu_{r+1} \leqslant \gamma_2 \left\{1 + \sum_{i=1}^{r+1} \gamma_i\right\} \exp\left\{\sum_{j=1}^{i-1} \gamma_j\right\} \leqslant \gamma_2 \exp\left\{\sum_{i=1}^{r+1} \gamma_i\right\}.$$

在$\{n \leqslant \nu\}$上应用引理 3.4.1,我们有

$$|\theta_n - \bar{\theta}(t_n)| \leqslant \exp\left\{L_2 \sum_{j=1}^{r} \gamma_i\right\}(U_1 + U_2);$$

$$\sup_{n \leqslant \nu} |\theta_n - \bar{\theta}(t_n)|^2 \leqslant \exp\{2L_2 T\}(2U_1^2 + 2U_2^2);$$

$$E\{\sup_{n \leqslant \nu} |\theta_n - \bar{\theta}(t_n)|^2\} \leqslant \exp\{2L_2 T\}(2E(U_1^2) + 2E(U_2^2)).$$

因为

$$U_2^2 \leqslant L_2^2 \sum_{k=1}^{m(T)} \gamma_k \sum_{k=1}^{m(T)} \gamma_k^3 \leqslant L_2^2 T \sum_{k=1}^{m(T)} \gamma_k^3,$$

并使用(3.4.7),我们有

$$\begin{aligned}
&E\{\sup_{n \leqslant \nu} |\theta_n - \bar{\theta}(t_n)|^2\} \\
&\leqslant B(1 + |x|^s)(1 + T\gamma_1^{2\lambda-1})(1 + L_2^2)\exp(2L_2 T) \sum_{k=1}^{m(T)} r_k^2.
\end{aligned} \tag{3.4.9}$$

定理 3.4.2 假定(A.1)~(A.5)满足,并且 $\gamma_1\leqslant 1$. 令 $Q_1\subset Q_2$ 是 D 的两个紧子集. 则存在常数 B_3, L_2, s 使得对所有满足(3.4.2)的 $T>0$, $\forall\delta<\delta_0$, $\forall a\in Q$, $\forall x$,我们有

$$P_{x,a}\{\sup_{n\leqslant m(T)}|\theta_n-\bar{\theta}(t_n;0,a)|\geqslant\delta\}$$
$$\leqslant\frac{B_3}{\delta^2}(1+|x|^s)(1+T)\exp\{2L_2T\}\sum_{k=1}^{m(T)}r_k^2.$$

特别地,如果 $\gamma_k=\gamma\leqslant 1$,对所有 k 成立,则

$$P_{x,a}\{\sup_{n\leqslant[T/\gamma]}|\theta_n-\bar{\theta}(n\gamma;0,a)|\geqslant\delta\}$$
$$\leqslant\frac{B_3}{\delta^2}(1+|x|^s)(T+T^2)\exp\{2L_2T\}\gamma,$$

其中 L_2 是函数 h 在 Q_2 上的 Lipschitz 常数.

假设 $\gamma_1\leqslant 1$ 被引入定理中是为了简化常数表达式. 这是不重要的,因为这通过调整 H 和 ρ_n 总可以得到.

如果 $P_{n,x,a}$ 表示(X_{n+k},θ_{n+k})带 $X_n=x,\theta_n=a$ 的分布,则像我们已经看到的一样 $P_{n,x,a}$ 等于 $\widetilde{P}_{n,a}$,其中 $\widetilde{P}_{n,a}$ 是由(3.1.1)给出的$(\widetilde{X}_k,\tilde{\theta}_k)$的分布,在(3.1.1)中 γ_k,ρ_n 分别被 γ_{k+n},ρ_{k+n} 替代. 因此,利用与定理 3.4.2 同样的假设,根据(A.3-ii)关于 n 一致性地成立,对所有的 n 我们有

$$P_{n;x,a}\{\sup_{n\leqslant r<m(n,T)}|\theta_r-\bar{\theta}(t_r;t_n,a)|\geqslant\delta\}$$
$$\leqslant\frac{B_3}{\delta^2}(1+|x|^s)(1+T)\exp\{2L_2T\}\sum_{k\geqslant n}r_k^2.$$

这个不等式表明如果级数 $\sum r_k^2$ 收敛,算法的轨迹有遵循微分方程(3.4.1)解的增加的趋势. 这隐含着如果微分方程(3.4.1) 有一个吸引子 θ_*,算法的轨迹趋向收敛到这个吸引子. 现在我们更精确地、系统地陈述这点.

§3.5 算法的渐近分析

假定存在 D 中的一点 θ_*,它是微分方程(3.4.1)的一个渐近稳定点;具有吸收域 D;这意外着对于 $a\in D$,方程(3.4.1)的任何一个解无限期地保留在 D 中,并且当 $t\to\infty$ 时,收敛到 θ_*. 则可以证明存在一个 D 上的 C^2 函数 U 使得

(i) $U(\theta_*)=0$; $U(\theta)>0$, $\forall\theta\in D,\theta\neq\theta_0$.

(ii) $U'(\theta)h(\theta)<0$, $\forall\theta\in D,\theta\neq\theta_*$.

(iii) 如果 $\theta\to D$ 或 $|\theta|\to\infty$, 则 $U(\theta)\to\infty$.

后面我们将在稍微更一般的假设下研究这种情况,即在吸引子可能是 D

的一个紧子集. 因此我们引进下面的假设

(A.6) $\sum r_n^{1+\lambda} < \infty$, 其中 $\lambda \in [1/2, 1]$.

(A.7) 存在一个 D 上 C^2 类正函数 U 使得 $U(\theta) \to C \leqslant \infty$, 如果 $\theta \to D$ 或 $|\theta| \to \infty$, 并且当 $\theta \in D$ 时, $U(\theta) < C$, 还满足

$$U'(\theta)h(\theta) \leqslant 0, \quad \forall \theta \in D. \tag{3.5.1}$$

我们引进一些记号

$$K(c) = \{\theta; U(\theta) \leqslant c\}; \tag{3.5.2}$$

$$\tau(c) = \inf\{n; \theta_n \notin K(c)\}; \tag{3.5.3}$$

$$\nu(c) = \inf\{n; \theta_n \in K(c)\}.$$

命题3.5.1　假定 $c_1 < c_2 < C$. 存在常数 B_3 和 s 使得对所有的 $a \in K(c_1)$, 所有的 $x \in R^d$, 有

$$P_{x,a}\{\tau(c_2) < \infty\} \leqslant B_3(1 + |x|^s)\sum_{k=1}^{\infty} r_k^{1+\lambda}. \tag{3.5.4}$$

证明　令 ϕ 是一个 R^d 上的 C^2 函数, 与函数 U 在 $K(c_2)$ 上一致, 并且满足

$$\inf\{\phi(\theta); \theta \notin K(c_2)\} = c_2.$$

因为由(3.2.5), 我们有

$$\phi(\theta_{k+1}) - \phi(\theta_k) = \gamma_{k+1}\phi'(\theta_k)h(\theta_k) + \varepsilon_k(\phi).$$

故对所有的 n 有

$$\phi(\theta_n) - \phi(\theta_0) = \sum_{k=0}^{n-1}\gamma_{k+1}\phi'(\theta_k)h(\theta_k) + \sum_{k=0}^{n-1}\varepsilon_k(\phi).$$

这样在 $\{\tau(c_2) < \infty\}$ 上有

$$\phi(\theta_{\tau(c_2)}) - \phi(\theta_0) = \sum_{k=0}^{\theta_{\tau(c_2)}-1}\gamma_{k+1}\phi'(\theta_k)h(\theta_k) + \sum_{k=0}^{\theta_{\tau(c_2)}-1}\varepsilon_k(\phi).$$

但是一方面, 如果 $a \in K(c_1)$, 则

$$\phi(\theta_{\tau(c_2)}) - \phi(\theta_0) \geqslant c_2 - c_1.$$

另一方面, 对于 $k < \tau(c_2)$ 有

$$\phi'(\theta_k)h(\theta_k) = U'(\theta_k)h(\theta_k) \leqslant 0.$$

$$(c_2 - c_1)I(\tau(c_2) < \infty) \leqslant I(\tau(c_2) < \infty)\left|\sum_{k=0}^{\theta_{\tau(c_2)}-1}\varepsilon_k(\phi)\right|$$

$$\leqslant \sup_n I(n \leqslant \tau(c_2))\left|\sum_{k=0}^{n-1}\varepsilon_k(\phi)\right|.$$

$$P(\tau(c_2) < \infty) \leqslant (c_2 - c_1)^{-2}E\left\{\sup_n I(n \leqslant \tau(c_2))\left|\sum_{k=0}^{n-1}\varepsilon_k(\phi)\right|^2\right\}.$$

再利用命题 3.3.6,(3.3.2)得到命题 3.5.1 的证明.

现在我们考虑 D 的一个紧子集 F 满足

$$F = \{\theta; U(\theta) \leqslant c_0\} \supset \{\theta; U'(\theta)h(\theta) = 0\}, \tag{3.5.5}$$

如果 θ_* 有吸引域 D,取 $F=\{\theta_*\}$,$c_0=0$ 时,这一条件被满足.

命题 3.5.2 假定 $c<c_2<C$. 对所有的 $a\in K(c)$,所有的 x,$\{\theta_n\}$ 在 $(\tau(c_2)<\infty)$ 上按概率 $P_{x,a}$ $a.s.$ 收敛到 F.

为了证明命题 3.5.2,我们从一个引理开始.

引理 3.5.3 假定 $c<c_1<c_2<C$. 对所有的 $a\in K(c_2)$,所有的 x,在 $(\tau(c_2)=\infty)$ 上,$\nu(c_1)<\infty$,按概率 $P_{x,a}$,$a.s.$ 成立.

证 明 从(3.5.1),我们有 $-U'(\theta_n)h(\theta_n)\geqslant\alpha>0$,对所有满足 $c_1\leqslant U(\theta)\leqslant c_2$ 的 θ 成立. 如果选择和命题3.5.1同样的函数 ϕ 和 $T>0$,则在 $(\nu(c_1)=\nu(c_2)=\infty)$ 上,我们有

$$\begin{aligned}\phi(\theta_{m(n,T)})-\phi(\theta_n) &= \sum_{k=n}^{m(n,T)-1}\gamma_{k+1}\phi'(\theta_k)h(\theta_k)+\sum_{k=n}^{m(n,T)-1}\varepsilon_k(\phi),\\ &\quad -\sum_{k=n}^{m(n,T)-1}\gamma_{k+1}\phi'(\theta_k)h(\theta_k)\\ &\geqslant \alpha\sum_{k=n}^{m(n,T)-1}\gamma_{k+1}\geqslant\alpha(T-1).\end{aligned}$$

另一方面

$$\phi(\theta_{m(n,T)})-\phi(\theta_n)\geqslant-(c_2-c_1),$$

因此

$$\sum_{k=n}^{m(n,T)-1}\varepsilon_k(\phi)\geqslant\alpha(T-1)-(c_2-c_1)\geqslant 1$$

对充分大的 T 成立. 这与命题 3.3.6 的第二点矛盾. 证毕.

命题 3.5.2 的证明:为了证明这一命题,我们将证明对所有的

$$c>c_0,\qquad \limsup U(\theta_n)\leqslant c.$$

假定 $c_0\leqslant c_1<c<c_2<C$,并考虑

$$\tau(c_2)=\infty,\qquad \limsup U(\theta_n)>c.$$

我们定义

$$\begin{aligned}\nu_1 &= \inf\{n;\theta_n\in K(c_1)\},\\ \tau_1 &= \inf\{n>\nu_1:\theta_n\notin K(c)\},\\ \nu_k &= \inf\{n>\tau_{k-1};\theta_n\in K(c_1)\},\\ \tau_k &= \inf\{n>\nu_{k-1};\theta_n\notin K(c)\}.\end{aligned}$$

所有这些值是有限的,并明显地有 $\nu_k\geqslant k$. 故对同一函数 ϕ 我们有

$$\phi(\theta_{\tau_n}) - \phi(\theta_{\nu_n}) = \sum_{k=\nu_n}^{\tau_n - 1} \gamma_{k+1} \phi'(\theta_k) h(\theta_k) + \sum_{k=\nu_n}^{\tau_n - 1} \varepsilon_k(\phi)$$
$$\leqslant \sum_{k=\nu_n}^{\tau_n - 1} \varepsilon_k(\phi),$$

但

$$\phi(\theta_{\tau_n}) - \phi(\theta_{\nu_n}) \geqslant c - c_1 > 0,$$

再次与命题 1.3.6 的第二点矛盾. 证毕.

定理 3.5.4　我们假定(A.1)~(A.7)成立, F 是一个满足(3.5.5)的紧集. 则对任何紧集 $Q \subset D$, 存在常数 B_4 和 s 使得对所有的 $n \geqslant 0$, 所有的 $a \in Q$, 所有的 x, 有

$$P_{n,x,a}(\theta_k \text{ 收敛到 } F) \geqslant 1 - B_4(1 + |x|^s) \sum_{k=n+1}^{\infty} r_k^{1+\lambda}.$$

证明　存在 c_2 使得 $Q \subset K(c_2)$, 根据命题 3.6.2, 在$(\tau(c_2) = \infty)$上, θ_k $a.s.$ 收敛到 F. 通过将命题 3.5.1 应用到下面算法中

$$\theta_{n+k+1} = \theta_{n+k} + \gamma_{n+k+1} H(\theta_{n+k}, X_{n+k+1}) + \rho_{n+k+1}(\theta_{n+k}, X_{n+k+1}), k \geqslant 0$$

并考虑到引理 3.4.1 和命题 3.5.1 的常数对所有序列$(r_{n+k}, k \geqslant 0)$是有效的(参见§3.3 节开始的说明). 我们得到 $P(\tau(c_2) = \infty)$的下界. 证毕.

§3.6　收敛定理的另一种叙述

定理 3.5.4 可以用不同的形式提出.

定理 3.6.1　假定对 R^d 的一开子集 D, (A.1)~(A.5)成立. 令 θ_* 是微分方程(3.4.1)的一个渐进稳定点. 假定 S 是 D 的一个紧子集, Q 是 θ_* 的吸收域的一个紧子集. 令

$$\Omega(S, Q) = \{\theta_n \in S, \forall n, \theta_n \in Q, \text{对无穷多个 } n\}.$$

则对所有的 x, a, 在 $\Omega(S, Q)$上, θ_n 按概率 $P_{x,a}$, $a.s.$ 收敛到 θ_*.

推论 3.6.2　假定 $D = R^d$, 如果

1. (θ_n)是 $a.s.$ 有界的.

2. θ_n, $a.s.$ 无限多次地访问 θ_* 的吸引域的一个紧子集.

则 θ_n $a.s.$ 收敛到 θ_*.

证明　通过使用 Kushner-Clark 引理, 定理 3.6.1 可以从命题 3.3.6 导出. 然而, 它亦可从定理 3.5.4 得到. 令 Δ 是一个包含 Q 的开集, U 是一个关于 θ_* 的 Lyapunov 函数. 则在 Δ 上, U 满足(A.6)和(A.7), 并且如果我们令 $F = \{\theta_*\}$, 则 F 满足(3.5.5), 带有 $c_0 = 0$. 又记 $K(c) = \{U \leqslant c\}$, 我们注意到

在$(\tau(S)=\infty)$上，

$$\limsup\{\theta_n \in K(c_1)\} \subset \liminf\{\theta_n \in K(c_2)\}, \quad c_1 < c_2 < C.$$

因为如果不成立，用ϕ表示U的一个适当的延拓，用ν_n，τ_n分别表示对$K(c_1)$和$K(c_2)^c$连接的访问，我们有

$$c_2 - c_1 \leqslant \phi(\theta_{\tau_n}) - \phi(\theta_{\nu_n}) \to 0.$$

选择c_1和c_2使得$Q \subset K(c_1)$，我们有

$$\begin{aligned}
&P(\Omega(S,Q) \wedge (\theta_k \to \theta_*)^c) \\
&= P((\tau(S) = \infty) \cap \limsup_n\{\theta_n \in Q\} \cap (\theta_k \to \theta_*)^c) \\
&\leqslant P((\tau(S) = \infty) \cap \liminf_n\{\theta_n \in K(c_2)\} \cap (\theta_k \to \theta_*)^c) \\
&\leqslant \liminf_n P((\tau(S) = \infty) \cap \{\theta_n \in K(c_2)\} \cap (\theta_k \to \theta_*)^c) \\
&\leqslant \liminf_n E(I(\tau(S) > n, \theta_n \in K(c_2)) P_{n,X_n,\theta_n}(\theta_k \to \theta_*)^c) \\
&\leqslant B_4 \liminf_n E(I(\tau(S) > n)(1 + |X_n|^s)) \sum_{k=n}^{\infty} r_k^{1+\lambda} \\
&\leqslant B_4 \mu_s (1 + |x|^s) \liminf_n \sum_{k=n}^{\infty} r_k^{1+\lambda} = 0.
\end{aligned}$$

§3.7 一个全局收敛性定理

我们假定条件(A.3)和(A.4)的常数$C_i(Q)$最快以Q的直径线性增长；如果$\lambda=1$常数C_4不依赖于Q；如果$\lambda<1$，其阶为$(\mathrm{diam}(Q))^{1-\lambda}$. 类似地，在(A.5)中，我们假定常数$\mu_q$不依赖于$Q$. 因此，我们假定存在常数$\bar{C}_i, q_i, i=1,\cdots,4$和$\mu_q(q>0)$，使得对所有的$\theta \in R^d, a \in R^d, n \geqslant 0, R>0$有

$$|H(\theta,x)| \leqslant \bar{C}_1(1+|\theta|)(1+|x|^{q_1}); \tag{3.7.1}$$

$$|\rho_n(\theta,x)| \leqslant \bar{C}_2(1+|\theta|)(1+|x|^{q_2}); \tag{3.7.2}$$

$$E_{x,a}(1+|X_{n+1}|^q) \leqslant \mu_q(1+|x|^q); \tag{3.7.3}$$

$$|\nu_\theta(x)| \leqslant \bar{C}_3(1+|\theta|)(1+|x|^{q_3}). \tag{3.7.4}$$

并且对所有满足$|\theta| \leqslant R$，$|\theta'| \leqslant R$的θ,θ'以及某个$\lambda \in [1/2, 2]$，有

$$|\pi_\theta \nu_\theta(x) - \pi_{\theta'} \nu_{\theta'}(x)| \leqslant \bar{C}_4(1+R^{1-\lambda})|\theta-\theta'|^\lambda(1+|x|^{q_4}). \tag{3.7.5}$$

其中ν_θ满足(A.4-ii). 我们进一步假定

$$\sum_k \gamma_k^{1+\lambda} < \infty. \tag{3.7.6}$$

定理 3.7.1　假定条件(A.1),(A.2)和(3.7.1)~(3.7.4)成立,则有下列性质

a. 如果存在一个 R^d 上 C^2 类正函数 U 具有有界二阶导数使得,对所有的 θ, $|\theta|\leqslant\rho_0(i)$有

(i) $U'(\theta)h(\theta)\leqslant 0$.

(ii) $U(\theta)\geqslant\alpha|\theta|^2, \alpha>0$.

则对所有的 $x\in R^k, a\in R^d$,序列(θ_n)是 $P_{x,a}\ a.s.$ 有界.

b. 进一步如果存在 $\theta_*\in R^d$ 使得

(i)′ $U'(\theta)h(\theta)<0$,对所有的 $\theta\neq\theta_*$ 成立.

(ii) $U(\theta)=0$,当且仅当 $\theta=\theta_*$.

则序列(θ_n)是 $P_{x,a}, a.s.$ 收敛到 θ_*.

注　如果 $V(\theta)$是一个 R^d 上正的正则函数,它随着$|\theta|$趋于无穷大,并满足(i)或(i)′和(ii),则对任何正则函数

$$\psi: R_+\to R_+,\quad \psi(0)=0, \psi'(t)>0,\quad \lim_{t\to\infty}\psi(t)=\infty.$$

$U=\psi\circ V$ 也满足(i)或(i)′和(ii),并随着$|\theta|$趋于无穷大.取一函数 ψ,它的导数在无穷远处充分快地趋于零,我们的目的是得到一个具有有界二阶导数的函数 U.另一方面,为了得到(ii),我们必须从这样一个函数 U 开始,它在集$\{|\theta|=R\}$上是均匀增加的.

定理 3.7.1 的证明　因为 U 的二阶导数是有界的,我们有

$$|U'(\theta)|\leqslant\overline{K}_1(1+|\theta|),\quad |U(\theta)|\leqslant\overline{K}_2(1+|\theta|)^2. \tag{3.7.7}$$

我们可以假定 $\alpha\leqslant 1$,设

$$A=(1+\overline{K}_2)(1+\rho_0^2); \tag{3.7.8}$$

$$\sigma_n=\inf\{k: U(\theta_k)>A2^n\}; \tag{3.7.9}$$

$$\tau_n=1+\sup\{k<\sigma_{n+1}, : U(\theta_k)\leqslant A2^n\}. \tag{3.7.10}$$

注意到如果 $k\in[\tau_n,\sigma_{n+1}]$,我们有 $\sigma_n\leqslant\tau_n\leqslant\sigma_{n+1}$, $U(\theta_{\tau_{n-1}})\leqslant A2^n$ 和$|\theta_k|\geqslant\rho_0$.

我们将构造一列集合 B_n,使得 $\lim_n P_{x,a}(B_n)=1$,并且对所有的 $n\geqslant 2$,在 $B_n\cap\{\sigma_{n+1}<\infty\}$上,有

$$U(\theta_{\sigma_{n+1}})-U(\theta_{\tau_n})\geqslant A2^n/4. \tag{3.7.11}$$

$$\lim_n 2^{-2n}E\{(U(\theta_{\sigma_{n+1}})-U(\theta_{\tau_n}))^2 I(B_n\cap\{\sigma_{n+1}<\infty\})\}=0. \tag{3.7.12}$$

从(3.7.11)和(3.7.12)立得

$$2^{-2n}E\{(U(\theta_{\sigma_{n+1}})-U(\theta_{\tau_n}))^2 I(B_n\cap\{\sigma_{n+1}<\infty\})\}$$

$$\geqslant \frac{A^2}{16} P\{I(B_n \cap \{\sigma_{n+1} < \infty\})\},$$

每当$\lim_n P(\sigma_{n+1}<\infty)=0$时成立. 因此有 $P_{x,a}(\sup_n|\theta_n|<\infty)=1$.

我们将通过一系列引理来构造 B_n 和建立(3.7.11)和(3.7.12). 首先注意到对所有的 $q\geqslant 0$,我们有

$$E\{\sum_k \gamma_k^{1+\lambda}(1+|X_k|^{q(1+\lambda)})\} \leqslant \mu_q(1+|x|^{q(1+\lambda)})\sum_k \gamma_k^{1+\lambda} < \infty,$$

$$\lim_k \gamma_k |X_k|^q = 0, \quad P_{x,a} \quad a.s.. \tag{3.7.13}$$

引理 3.7.2 令

$$C_n = \{\forall k \geqslant n, U(\theta_{k+1}) - U(\theta_k) \leqslant \frac{1}{2}(U(\theta_k)+A)\},$$

则 $P(C_n)$趋于 1.

证明 一方面我们有

$$U(\theta_{k+1}) - U(\theta_k) \leqslant |U'(\theta_k)||\theta_{k+1}-\theta_k| + \frac{1}{2}\sup_\theta |U''(\theta)||\theta_{k+1}-\theta_k|^2,$$

另一方面,由假设知

$$|\theta_{k+1}-\theta_k|$$
$$\leqslant \gamma_{k+1}\bar{C}_1(1+|\theta_k|)(1+|X_{k+1}|^{q_1}) + \gamma_{k+1}^2\bar{C}^2(1+|\theta_k|)(1+|X_{k+1}|^{q_2}),$$
$$|U'(\theta_k)| \leqslant \bar{K}_1(1+|\theta_k|),$$
$$|U''(\theta_k)| \leqslant M_2.$$

因此

$$U(\theta_{k+1}) - U(\theta_k) \leqslant (1+|\theta_k|^2)Z_k,$$

根据(3.7.13),其中 Z_k $a.s.$ 趋于 0.

但如果$|\theta_k|\leqslant\rho_0$,则有 $1+|\theta_k|^2\leqslant 1+\rho_0^2$;

如果$|\theta_k|\geqslant\rho_0$,则有 $1+|\theta_k|^2\leqslant 1+\alpha^{-1}U(\theta_k)$.

在所有的情形有 $1+|\theta_k|^2\leqslant\alpha^{-1}(U(\theta_k)+A)$,所以

$$U(\theta_{k+1}) - U(\theta_k) \leqslant \alpha^{-1}Z_k(U(\theta_k)+A).$$

引理 3.7.3 $\lim_n P(n<\sigma_n)=1$.

证明 据引理 3.7.2 只须说明对每个 r,有

$$\lim_n P[C_r \cap (n \geqslant \sigma_n)] = 0.$$

如果 $V(\theta)=U(\theta)+A$,则在 C_r 上,对于 $k\geqslant r$,我们有 $V(\theta_{k+1})\leqslant \frac{3}{2}V(\theta_k)$,故 $V(\theta_k)\leqslant(3/2)^{k-r}V(\theta_r)$,进而在 C_r 上,有

$$U(\theta_k) \leqslant A + (3/2)^{k-r}(U(\theta_r)+A). \tag{3.7.14}$$

因为

$$\{\sigma_n \leqslant n\} = \{\sup_{r<k\leqslant n} U(\theta_k) \geqslant A2^n\} \bigcup \cup_{k=1}^{r} \{U(\theta_k) \geqslant A2^n\}.$$

显然当 n 趋于无穷时,$P\{U(\theta_k)\geqslant A2^n\}$趋于零.因此为了证明引理,只须注意

$$P[C_r \cap \{\sup_{r<k\leqslant n} U(\theta_k) \geqslant A2^n\}] \leqslant P[U(\theta_r) + A] \geqslant A2^n(3/2)^{r-n}] \to 0.$$

我们记

$$B_n = C_n \cap (n < \sigma_n). \tag{3.7.15}$$

引理 3.7.4　在 $B_n \cap (\sigma_{n+1} < \infty)$上,有

$$U(\theta_{\sigma_{n+1}}) - U(\theta_{\tau_n}) \geqslant A2^n/4, \quad n \geqslant 2.$$

证明　在$(\sigma_{n+1}<\infty)$上,$U(\theta_{\sigma_{n+1}})\geqslant A2^{n+1}$,进而在 B_n 上,$n<\sigma_n\leqslant\tau_n$,故 $\tau_n - 1\geqslant n$,据此有

$$U(\theta_{\tau_n}) \leqslant \frac{3}{2}U(\theta_{\tau_n}) + \frac{A}{2} \leqslant \frac{3}{2}A2^n + A/2,$$

$$U(\theta_{\sigma_{n+1}} - U(\theta_{\tau_n})) \geqslant A[2^{n+1} - \frac{3}{2}2^n - \frac{1}{2}] \geqslant A2^n/4, n \geqslant 2.$$

引理 3.7.5　我们有

$$E\left\{\left|U(\theta_{\sigma_{n+1}}) - U(\theta_{\tau_n})\right|^2 I(B_n \cap (\sigma_{n+1} < \infty))\right\} \leqslant 2^{2n}\alpha_n,$$

其中 α_n 是一趋于零的实变量序列.

证明　在 $B_n \cap (\sigma_{n+1}<\infty)$上,有

$$U(\theta_{\sigma_{n+1}}) - U(\theta_{\tau_n}) = \sum_{k=\tau_n}^{\sigma_{n+1}-1} \gamma_{k+1} U'(\theta_k) h(\theta_k) + \sum_{k=\tau_n}^{\sigma_{n+1}-1} \varepsilon_k(U)$$

$$\leqslant \sum_{k=\tau_n}^{\sigma_{n+1}-1} \varepsilon_k(U).$$

因为当 $k\in[\tau_n,\sigma_{n+1}]$时,$|\theta_k|\geqslant\rho_0$,根据 A 的选择,有

$$I(B_n \cap (\sigma_{n+1} < \infty))|U(\theta_{\sigma_{n+1}}) - U(\theta_{\tau_n})|$$

$$\leqslant I(B_n \cap (\sigma_{n+1} < \infty)) \sup_{b<k<\sigma_{n+1}} \left|\sum_{i=k}^{\sigma_{n+1}-1} \varepsilon_i(U)\right|$$

$$\leqslant 2I(B_n \cap (\sigma_{n+1} < \infty)) \sup_{b<k\leqslant\sigma_{n+1}} \left|\sum_{i=n}^{k-1} \varepsilon_i(U)\right|$$

$$\leqslant 2I(n < \sigma_n) \sup_{n<k} I(k \leqslant \sigma_{n+1}) \left|\sum_{i=n}^{k-1} \varepsilon_i(U)\right|.$$

然而,根据命题 3.3.6 在$(n<\sigma_n)$上,

$$E\left\{\sup_{n<k} I(k \leqslant \sigma_{n+1}) \left|\sum_{i=n}^{k-1} \varepsilon_i(U)\right|^2 \mathscr{F}_n\right\}$$

$$\leqslant \bar{K}_4 B_1(Q_n)(1+|X_n|^s)\sum_{k\geqslant n}\gamma_{k+1}^{1+\lambda},$$

其中

$$Q_n = \{\theta; U(\theta)\leqslant A2^{n+1}\}. \tag{3.7.16}$$

所以

$$E\{I(B_n\cap(\sigma_{n+1}<\infty))\left|U(\theta_{\sigma_{n+1}})-U(\theta_{\tau_n})\right|^2\}$$
$$\leqslant \bar{K}_5 B_1(Q_n)(1+|x|^s)\alpha_n.$$

剩下的是估计 $B_1(Q_n)$. 对 $\theta\in Q_n$,我们有

$$|\theta|^2\leqslant \alpha^{-1}U(\theta)+A\leqslant \alpha^{-1}A(2^{n+1}+1).$$

这样常数 $C_i(Q_n)(i=1,2,3)$和命题 3.3.6 的 $M_1(Q_n)$,如同常数 $2^{n/2}$一样地增加,并且 $C_4(Q_n)$,如同常数 $2^{n(1-\lambda)/2}$一样地增加,所以 $B_2(Q_n)\leqslant \bar{K}_6 2^{2n}$,这蕴涵着引理 3.7.5.

定理 3.7.1 的证明(继续). 从定理 3.7.4 可以得到定理 3.7.1 的第二部分.

§3.8 一些算法的 L^2 收敛速度

本节我们讨论对一个合适的常数 λ 和指数 β,得到形为 $E(|\theta_n-\theta_*|^2)\leqslant\lambda\gamma_n^\beta$ 的上界问题,这样一个上界在 RM 算法中容易得到. 对更一般的算法,得到这种类型的上界很困难. 的确,为获得带有实际假设的一般性定理出现了困难. 在模拟均衡器情形中,Eweda 和 Macchi 1983 年给出了一个这种类型的上界. 对于一般的算法,我们将简单地证明具有一"局部 L^2 上界"的定理,即具有形为

$$E(|\theta_n-\theta_*|^2 I(n\leqslant\tau(Q)))\leqslant\lambda\gamma_n$$

的上界. 其中,照例 $\tau(Q)$是 θ_n 离开紧集 Q 的时间.

3.8.1 Robbins-Monro 算法

我们将考虑在例 3.1.4(也可参见 3.1.4 节)给出的 Robbins-Monro(RM)算法. 算法由下式给出

$$\theta_{n+1}=\theta_n+\gamma_{n+1}H(\theta_n,X_{n+1}), \tag{3.8.1}$$

其中

$$E[H(\theta_n,X_{n+1})-h(\theta_n)|\mathscr{F}_n]=0, \tag{3.8.2}$$

$$h(\theta)=\int H(\theta,x)\mu_\theta(\mathrm{d}x). \tag{3.8.3}$$

注意到 $E_{x,a}$不依赖于 x;我们把它记为 E_a. 一个常用的假设为:对所有的 $a\in$

R^k,

$$E_a[\,|H(\theta_n, X_{n+1})|^2\,|\mathscr{F}_n] \leqslant C_1(1 + |\theta_n|^2), \tag{3.8.4}$$

对某一合适的 C_1 成立. 我们假定存在一个常数 $\delta>0$,使得对所有的 θ

$$(\theta_n - \theta_*)h(\theta) \leqslant -\delta|\theta_n - \theta_*|^2. \tag{3.8.5}$$

并且对某个 $\beta\leqslant 1$ 有

$$\liminf_{n\to\infty} 2\delta\frac{\gamma_n^\beta}{\gamma_{n+1}} + \frac{\gamma_{n+1}^\beta - \gamma_n^\beta}{\gamma_{n+1}^2} > 0. \tag{3.8.6}$$

关于(3.8.6)的说明:如果

$$\gamma_n = \frac{A}{n^\alpha + B}, \qquad 0\leqslant\alpha\leqslant 1,$$

则条件(3.8.6)对所有的 $\beta<1$ 为真. 如果 $2\delta>\alpha/A$,则对 $\beta=1$,(3.8.6)亦为真.

定理 3.8.1　在假设(3.8.2)~(3.8.1)之下,算法(3.8.1)有下面的性质

$$E_a(|\theta_n - \theta_*|^2) \leqslant \lambda(a)\gamma_n^\beta,$$

对某一合适的常数 $\lambda(a)$成立.

证明　只须说明对某一适当的 n_0,存在 $\lambda(a, n_0)$,使得对所有的 $n\geqslant n_0$ 有

$$E_a(|\theta_n - \theta_*|^2) \leqslant \lambda(a, n_0)\gamma_n^\beta. \tag{3.8.7}$$

令 $T_n = \theta_n - \theta_*$ 并记

$$\begin{aligned}
&E(|T_{n+1}|^2 \mid \mathscr{F}_n)\\
&= |T_n|^2 + 2\gamma_{n+1}T_n h(\theta_n) + 2\gamma_{n+1}T_n E[H(\theta_n, X_{n+1}) - h(\theta_n)|\mathscr{F}_n)\\
&\quad + \gamma_{n+1}^2 E[\,|H(\theta_n, X_{n+1})|^2|\mathscr{F}_n).
\end{aligned}$$

假定 n 充分大使得 $1\geqslant 2\gamma_{n+1}\delta$. 从(3.8.2)和(3.8.3),并取期望

$$E(|T_{n+1}|^2) \leqslant (1 - 2\gamma_{n+1}\delta + \bar{C}_1\gamma_{n+1}^2)E|T_n|^2 + \bar{C}_1\gamma_{n+1}^2, \tag{3.8.8}$$

其中 $\bar{C}_1$ 是一个常数使得

$$C_1(1 + |\theta|^2) \leqslant \bar{C}_1(1 + |\theta - \theta_*|^2).$$

我们将使用下面的引理.

引理 3.8.2　存在 λ_0 和 n_0 使得对所有的 $\lambda>\lambda_0$ 和 $n\geqslant n_0$,序列 $u_n = \lambda\gamma_n^\beta$ 满足

$$u_{n+1} \geqslant (1 - 2\gamma_{n+1}\delta + \bar{C}_1\gamma_{n+1}^2)u_n + \bar{C}_1\gamma_{n+1}^2.$$

证明　事实上,条件

$$\lambda\gamma_{n+1}^\beta \geqslant (1 - 2\gamma_{n+1}\delta + \bar{C}_1\gamma_{n+1}^\beta)\lambda\gamma_n^\beta + \bar{C}_1\gamma_{n+1}^2, \tag{3.8.9}$$

可以重写为

$$\lambda(\gamma_{n+1}^{\beta} - \gamma_n^{\beta} + \gamma_{n+1}\gamma_n^{\beta}(2\sigma - \gamma_{n+1}\bar{C}_1)) \geqslant \bar{C}_1\gamma_{n+1}^2.$$

λ_0 和 n_0 的存在使得直接从(3.8.6)得到对所有的 $\lambda > \lambda_0$ 和 $n \geqslant n_0$,(3.8.9)为真.

定理 3.8.1 的证明(续) 假定 λ_0 和 n_0 按引理 3.8.2 定义.选择 $\lambda(n_0, a) \geqslant \lambda_0$ 使得

$$E\left|T_{n_0}\right|^2 \leqslant \lambda(n_0, a)\gamma_{n_0}^{\beta}.$$

通过对 n 归纳立即得到序列 $u_n = \lambda(n_0, a)\gamma_n^{\beta}, n \geqslant n_0$,满足 $E\left|T_n\right|^2 \leqslant u_n$.

3.8.2 一般算法的局部L^2 上界

我们再回来讨论下面算法

$$\theta_{n+1} = \theta_n + \gamma_{n+1}H(\theta_n, X_{n+1}) + \gamma_{n+1}^2\rho_{n+1}(\theta_n, X_{n+1}). \quad (3.8.10)$$

它满足本章的一般假设(A.1)～(A.5)和下面补加条件:存在 $\delta > 0$ 和 θ_* 使得对所有的 $\theta \in {}^d$

$$(\theta_n - \theta_*)h(\theta) \leqslant -\delta\left|\theta_n - \theta_*\right|^2, \quad (3.8.11)$$

$$\liminf_{n\to\infty} 2\delta\frac{\gamma_n^{\beta}}{\gamma_{n+1}} + \frac{\gamma_{n+1}^{\beta} - \gamma_n^{\beta}}{\gamma_{n+1}^2} > 0. \quad (3.8.12)$$

定理 3.8.3 在假定$(A.1)$～$(A.5)$,$\lambda = 1$ 和条件(3.8.11)和(3.8.12)之下,算法(3.8.10)有下面性质:对任何一个紧集 $Q \subset R^d$,对所有的 $x \in R^k$, $a \in Q$,存在常数 $\lambda(x, a, Q)$使得

$$E_{x,a}(\left|\theta_n - \theta_*\right|^2 I(n \leqslant \tau(Q))) \leqslant \lambda(x, a, Q)\gamma_n,$$

其中

$$\tau(Q) = \inf\{n : \theta_n \notin Q\}.$$

证明 记 $T_n = \theta_n - \theta_*$,利用分解

$$H(\theta, x) = h(\theta) + \nu_{\theta}(x) - \Pi_{\theta}\nu_{\theta}(x),$$

我们得到

$$\begin{aligned}\left|T_{n+1}\right|^2 = {} & \left|T_n\right|^2 + 2\gamma_{n+1}T_n h(\theta_n) + 2\gamma_{n+1}T_n\left[\nu_{\theta_n}(X_{n+1}) - \Pi_{\theta_n}\nu_{\theta_n}(X_{n+1})\right] \\ & + 2\gamma_{n+1}^2 T_n\rho_{n+1}(\theta_n, X_{n+1}) \\ & + \gamma_{n+1}^2\left|H(\theta_n, X_{n+1}) + \gamma_{n+1}\rho_{n+1}(\theta_n, X_{n+1})\right|^2. \end{aligned} \quad (3.8.13)$$

然后如同 3.3.2 节一样地分解:

$$\begin{aligned} & \nu_{\theta_n}(X_{n+1}) - \Pi_{\theta_n}\nu_{\theta_n}(X_{n+1}) \\ = {} & \nu_{\theta_n}(X_{n+1}) - \Pi_{\theta_n}\nu_{\theta_n}(X_n) + \Pi_{\theta_{n-1}}\nu_{\theta_{n-1}}(X_n) - \Pi_{\theta_n}\nu_{\theta_n}(X_{n+1}) \end{aligned}$$

$$+ \Pi_{\theta_n}\nu_{\theta_n}(X_n) - \Pi_{\theta_{n-1}}\nu_{\theta_{n-1}}(X_n).$$

注意到

$$E\left\{T_n\left[\nu_{\theta_n}(X_{n+1}) - \Pi_{\theta_n}\nu_{\theta_n}(X_n)\right]\right\} = 0, \tag{3.8.14}$$

$$T_n\left[\Pi_{\theta_{n-1}}\nu_{\theta_{n-1}}(X_n) - \Pi_{\theta_n}\nu_{\theta_n}(X_{n+1})\right]$$
$$= z_n - z_{n+1}(T_n - T_{n+1})\Pi_{\theta_n}\nu_{\theta_n}(X_{n+1}),$$

其中

$$z_n = T_n\Pi_{\theta_{n-1}}\nu_{\theta_{n-1}}(X_n), \tag{3.8.15}$$

并且

$$\left|(T_n - T_{n+1})\Pi_{\theta_n}\nu_{\theta_n}(X_{n+1})\right|$$
$$\leqslant \gamma_{n+1}\left|H(\theta_n, X_{n+1})\Pi_{\theta_n}\nu_{\theta_n}(X_{n+1})\right|$$
$$+ \gamma_{n+1}^2\left|\rho_{n+1}(\theta_n, X_{n+1})\right|\left|\Pi_{\theta_n}\nu_{\theta_n}(X_{n+1})\right|.$$

因此从(3.8.13),(3.8.14),(A.3)和(A.4),推出

$$E_{x,a}(|T_{n+1}|^2 I(n+1 \leqslant \tau(Q)))$$
$$\leqslant (1 - 2\gamma_{n+1}\delta + \bar{C}_1(Q,x)\gamma_{n+1}^2)E_{x,a}(|T_n|^2 I(n \leqslant \tau(Q)))$$
$$+ \gamma_{n+1}^2\bar{C}_2(Q,x) + 2\gamma_{n+1}E(z_n - z_{n+1}). \tag{3.8.16}$$

对适当的常数 $\bar{C}_1(Q,x)$ 和 $\bar{C}_2(Q,x)$ 成立. 注意到由于(A.4),有

$$E(|z_n|) \leqslant \bar{C}_3(a,x,Q). \tag{3.8.17}$$

引理 3.8.4 假定 n_0 使得对所有的 $n \geqslant n_0$, $1 - 2\gamma_{n+1}\delta + \gamma_{n+1}^2\bar{C}_1(a, x, Q) \geqslant 0$ 成立,且

$$\inf_{n \geqslant n_0} \frac{\gamma_{n+1} - \gamma_n}{\gamma_{n+1}\gamma_n} + 2\delta - \gamma_{n+1}\bar{C}_1 > 0.$$

对 $n \geqslant n_0 + 1$,考虑有限序列 $(\Lambda_k^n)_{k=n_0,\cdots,n}$,

$$\Lambda_k^n = \begin{cases} 2\gamma_k \prod_{j=k}^{n-1}(1 - 2\gamma_{j+1}\delta + \gamma_{j+1}^2\bar{C}_1), & k \geqslant n-1, \\ 2\gamma_n, & k = n. \end{cases}$$

则序列 $(\Lambda_k^n)_{k=n_0,\cdots,n}$ 是增加的.

证明 如果 $k+1 < n$,

$$\Lambda_{k+1}^n - \Lambda_k^n$$
$$= \left(\prod_{j=k+1}^{n-1}(1 - 2\gamma_{j+1}\delta + \gamma_{j+1}^2\bar{C}_1)\right)2(\gamma_{k+1} - \gamma_k + 2\gamma_k\gamma_{k+1}\delta - \gamma_k\gamma_{k+1}^2\bar{C}_1).$$

如果 $k+1 = n$,

$$\Lambda_n^n - \Lambda_{n-1}^n = 2(\gamma_n - \gamma_{n-1} + 2\gamma_n\gamma_{n-1}\delta - \gamma_{n-1}\gamma_n^2\overline{C}_1).$$

这样,如果 $n > n_0$,对所有的 $n_0 \leqslant k < n$,我们有 $\Lambda_{k+1}^n - \Lambda_k^n \geqslant 0$.

引理 3.8.5 令 $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ 是一个实数序列使得对所有的 $n \geqslant n_0$,有

$$u_{n+1} \geqslant u_n(1 - 2\gamma_{n+1}\delta + \gamma_{n+1}^2\overline{C}_1) + \gamma_{n+1}^2\overline{C}_2. \tag{3.8.18}$$

$$E(|T_{n_0}|^2 I(n_0 \leqslant \tau(Q))) \leqslant u_{n_0}. \tag{3.8.19}$$

则对所有的 $n \geqslant n_0 + 1$ 有

$$E(|T_n|^2 I(n \leqslant \tau(Q))) \leqslant u_n + \sum_{k=n_0+1}^{n} \Lambda_k^n(z_{k-1} - z_k). \tag{3.8.20}$$

证明 如果(3.8.20)对 n 是真的,则根据(3.8.16)和(3.8.18)有

$$\begin{aligned}
&E(|T_{n+1}|^2 I(n+1 \leqslant \tau(Q))) \\
&\leqslant u_{n+1} + (1 - 2\gamma_{n+1}\delta + \gamma_{n+1}^2\overline{C}_1)\Big(\sum_{k=n_0+1}^{n} \Lambda_k^n(z_{k-1} - z_k)\Big) \\
&\quad + 2\gamma_{n+1}E(z_n - z_{n+1}) \\
&\leqslant u_{n+1} + \Big(\sum_{k=n_0+1}^{n} \Lambda_k^{n+1}(z_{k-1} - z_k)\Big) + \Lambda_{n+1}^{n+1}(z_n - z_{n+1}) \\
&\leqslant u_{n+1} + \Big(\sum_{k=n_0+1}^{n+1} \Lambda_k^{n+1}(z_{k-1} - z_k)\Big).
\end{aligned}$$

定理 3.8.3 的证明(续) 显然只须说明,对某个适当的 N,存在 $\lambda(a, x, N, Q)$,使得对所有的 $n \geqslant N$,有

$$E_{x,a}(|\theta_n - \theta_*|^2 I(n \leqslant \tau(Q))) \leqslant \lambda(x, a, N, Q)\gamma_n.$$

我们取 $N \geqslant n_0$,其中 n_0 按引理 3.8.4 定义. 固定 N,选择 λ 使得

$$E(|T_N|^2) \leqslant \lambda\gamma_N,$$

对 $n \geqslant N$,我们有

$$\sum_{k=N+1}^{n} \Lambda_k^n(z_{k-1} - z_k) = \sum_{k=N+1}^{n-1} (\Lambda_{k+1}^n - \Lambda_k^n)z_k - 2\gamma_n z_n + \Lambda_{N+1}^n z_N.$$

由(3.8.20)和(3.8.17),对任意满足(3.8.18)和(3.8.19)的序列 $(u_n)_{n\geqslant N}$,我们有

$$E(|T_n|^2 I(n \leqslant \tau(Q))) \leqslant u_n + 3\overline{C}_3(a, x, Q)\Lambda_n^n. \tag{3.8.21}$$

如同在引理 3.8.2 中一样,我们看到序列 $u_n = \lambda\gamma_n$,对充分大的 $n > N$,满足性质(3.8.18). 从(3.8.21)和 $\Lambda_n^n = 2\lambda\gamma_n$,即可得到定理 3.8.3.

第四章　应　　用

本章的目的是提供一个准则，在此准则之下，给出第三章的假设(A.4)有效的范围．正如§3.1及关于(A.4)的注c所提到的，验证假设(A.4)成立时，要求转移概率为P_θ的马尔可夫链是遍历的，并且函数$P_\theta H_\theta$关于θ是正则的．

在§4.1我们考虑在适合我们的算法分析的设置下马尔可夫链的几何遍历性．§4.2给出了(A.4)成立的充分条件．§4.3研究与线性动力学(例3.1.1)关联的转移概率P_θ．§4.4提供两个例子(即横断均衡器和最小二乘算法)的更精确的范围．

§4.1　马尔可夫链的几何遍历性

4.1.1　预备引理

考虑取值于R^k的马尔可夫链，$P(\cdot,\cdot)$为定义在R^k上的转移函数．$x,y,\cdots$等表示R^k中的点，令

$$\mu_p(x) = \int P(x,\mathrm{d}y)|y|^p. \tag{4.1.1}$$

引理 4.1.1　设g为R^k上函数，存在常数$K\geqslant 0, q\geqslant 0, \rho\in(0,1)$，使得对所有的$x,y,n$，

$$|P^n g(x) - P^n g(y)| \leqslant K\rho^n(1+|x|^q+|y|^q), \tag{4.1.2}$$

并且$\mu_q(x)$对所有x是有限的．则存在一常数r，使得对所有z,n，

$$|P^n g(x) - r| \leqslant K\frac{\rho^n}{1-\rho}(1+|x|^q+\mu_q(x)), \tag{4.1.3}$$

而且如果对所有x，$1+|y|^q+\mu_q(y)$是$P(x,\cdot)$可积的，那么$u=\sum\limits_{n\geqslant 0}(P^n g - r)$是$(I-P)u = g - r$的一个解．

证明　$$\begin{aligned}|P^{n+1}g(x) - P^n g(x)| &= \left|\int P(x,\mathrm{d}y)[P^n g(y) - P^n g(x)]\right|\\ &\leqslant K\rho^n\int P(x,\mathrm{d}y)(1+|x|^q+|y|^q)\\ &\leqslant K\rho^n(1+|x|^q+\mu_q(x)).\end{aligned} \tag{4.1.4}$$

于是$\forall k\geqslant 0$，

$$|P^{n+k}g(x) - P^n g(x)| \leqslant K\frac{\rho^n}{1-\rho}(1+|x|^q+\mu_q(x)), \tag{4.1.5}$$

这意味着 $P^n g(x)$ 收敛到某个 r,但是(4.1.2)意指不论 y 为何值,$P^n g(y)$ 收敛到相同的极限 r.在(4.1.5)中令 k 趋于无穷,即可得到(4.1.3).

因此级数 $\sum_{n\geqslant 0}(P^n g(y)-r)$ 收敛,并且由于

$$\sum |P^n g(y)-r| \leqslant K(1-\rho)^{-2}(1+|y|^q+\mu_q(y))$$

是 $P(x,\cdot)$ 可积的,由 Lebesgue 控制收敛定理得

$$Pu=\sum_{n\geqslant 0}P(P^n g-r)=\sum_{n\geqslant 1}(P^n g-r)=u-(g-r).$$

4.1.2 不变概率与 Poisson 方程的解

给定定义在 R^k 上的函数 g,对 $p\geqslant 0$,设

$$\| g\|_p=\sup_x \frac{g(x)}{1+|x|^p}, \tag{4.1.6}$$

$$[g]_p=\sup_{x\neq y}\frac{g(x)-g(y)}{|x-y|(1+|x|^p+|y|^p)}, \tag{4.1.7}$$

$$L_i(p)=\{g:[g]_p<\infty\}.$$

易知如果 $[g]_p<\infty$,就有 $\| g\|_{p+1}<\infty$,于是我们引入

$$N_p(g)=\sup\{\| g\|_{p+1},[g]_p\}. \tag{4.1.8}$$

现在固定 $p\geqslant 0$.

命题 4.1.2 设存在正常数 $K,q,\mu,\rho>1$ 使得对于所有的 $g\in L_i(p)$,$x,y,z\in R^k$,

$$|P^n g(y)-P^n g(z)|\leqslant K\rho^n N_p(g)(1+|y|^q+|z|^q), \tag{4.1.9}$$

$$\mu_q(x)\leqslant \mu(1+|x|^q), \tag{4.1.10}$$

那么存在仅依赖 K,μ,ρ 的常数 M,对所有的 $g\in L_i(p)$,存在数 Rg,使得对所有的 x,

(i) $|P^n g(x)-\Gamma_g|\leqslant M\rho^n N_p(g)(1+|x|^q)$,

(ii) $u=\sum_{n\geqslant 0}(P^n g-Rg)$,

满足

$$(I-P)u=g-Rg, \tag{4.1.11}$$

而且如果对任意的 R^k 上有紧支撑的 C^∞ 函数 f,Pf 连续,则具有转移概率函数为 P 的马氏链有惟一的不变概率 m,满足

$$\int |x|^{p+1}m(\mathrm{d}x)<\infty,$$

并且对所有 $g\in L_i(p)$,

$$Rg=\int g\mathrm{d}m.$$

证明　由引理 4.1.1 可得对某个常数 Rg,(i)和(ii)成立.记$(L_i)_c$ 为 R^k 上的有紧支撑的 Lipschitz 函数空间.则$(L_i)_c \subset L_i(p)$,并且 $g \to Rg$ 定义了$(L_i)_c$ 上的一个正线性型.因此在 R^k 上存在一个正的 Radon 测度 m,使得对所有 $g \in (L_i)_c$, $Rg = \int g \mathrm{d}m$. 对 $s \in N^*$,定义 $\phi_s(t)$, $(t \in R_+)$,当$0 \leqslant t \leqslant s/2$时,$\phi_s(t)=1$;当$t \geqslant s$时,$\phi_s(t)=0$;$s/2 < t < s$时,为线性的.设$f_s(x)=\phi_s(|x|)$,则 f_s 上升趋于 1,且满足

$$|f_s(x)-f_s(y)| \leqslant 2|x-y|/s.$$

令 $g \in L_i^+(p)$,估计$|(gf_s)(x)-(gf_s)(y)|$.如果$|x| \geqslant s$ 且$|y| \geqslant s$,则它为零.故假定$|x| \leqslant s$,那么

$$\begin{aligned}
&|(gf_s)(x)-(gf_s)(y)| \\
\leqslant &|g(x)\|f_s(x)-f_s(y)|+|f_s(y)\|g(x)-g(y)| \\
\leqslant &\frac{2}{S}N_p(g)|x-y|(1+|x|^{p+1})+|g(x)-g(y)| \\
\leqslant &2N_p(g)|x-y|(1+|x|^p)+N_p(g)|x-y|(1+|x|^p+|y|^p).
\end{aligned}$$

因而

$$N_p(gf_s) \leqslant 3N_p(g).$$

由于 $gf_s \in (L_i)_c$,由(4.1.11-i),对所有 s 有

$$\left|P^n(gf_s)(x)-\int gf_s \mathrm{d}m\right| \leqslant 3M\rho^n N_p(g)(1+|x|^q),$$

因此令 $s \to \infty$,就有

$$\left|P^n(g)(x)-\int gf_s \mathrm{d}m\right| \leqslant 3M\rho^n N_p(g)(1+|x|^q),$$

这就证明了对$g \in L_i^+(p)$,$\int g \mathrm{d}m < \infty$,且值为$Rg$.特别地,取$g(x)=|x|^{p+1}$有,$\int |x|^{p+1} m(\mathrm{d}x) < \infty$,取$g=1$,有$m(R)=1$.由于$g \in L_i(p)$,就意味着$g^+ \in L_i(p)$,$g^- \in L_i(p)$,所以可以直接推广到$g \in L_i(p)$.现在记$C_p$为$R^k$上满足$\|g\|_p < \infty$的连续函数$g$构成的函数空间,那么对$g \in C_{p+1}$,

$$\lim_n P^n g(x) = \int g \mathrm{d}m.$$

实际上,若记 $\phi_p(x)=|x|^p$,则对固定的 x,序列$(P^n\phi_{p+1}(x);n \geqslant 0)$有界,且收敛到$\int \phi_{p+1}\mathrm{d}m$;因此正线性型序列 $g \to \int P^n(x,\mathrm{d}y)g(y)$ 是定义在 C_{p+1} 上,由于

$$\left|\int P^n(x,\mathrm{d}y)g(y)\right| \leqslant |g|_{p+1}(1+P^n\phi_{p+1}(x)) \leqslant c_p\|g\|_{p+1},$$

它也是等度连续的. 因为此序列在稠子集 $L_i(p)$ 上收敛, 故对所有的 $g \in C_{p+1}$, 它收敛, 由 $g \to \int g\mathrm{d}m$ 在 C_{p+1} 上连续, 可知其极限惟一地为 $\int g\mathrm{d}m$.

假设 $g \in C_k^\infty$ 且 Pg 连续(故它属于 C_{p+1}), 则

$$\int g\mathrm{d}m = \lim_n P^n g = \lim_n P^n(Pg) = \int Pg\mathrm{d}m,$$

这就证明了 m 是转移函数为 P 的马氏链的不变概率. 这个不变概率是惟一的, 实际上设 m' 是它的另一个不变概率, 那么对所有的 $\phi \in (L_i)_c$ 和 n, $\int \phi\mathrm{d}m' = \int P^n\phi\mathrm{d}m'$, 于是

$$\int \phi\mathrm{d}m' = \lim_n \int P^n\phi\mathrm{d}m' = \int R\phi\mathrm{d}m' = R\phi = \int \phi\mathrm{d}m.$$

4.1.3 由 $L_i(p)$ 到 $L_i(p)$ 的连续转移函数 P 的情形

我们将看到命题 4.1.2 很适合于研究一定的随机算法, 然而由于它包含了所有的 P^n, 下面给出的结果将更令人满意. 我们仍然讨论取值于 R^k 的马氏链, 整数 p 仍然是固定的.

命题 4.1.3 设存在常数 $l \in N^*, K \in R_+, \rho \in (0,1)$, 使得对某 $x_0 \in R^k$ 和所有的 $g \in L_i(p)$; $x, y \in R^k$, 有

(1) $\mu_{p+1}(x_0) < \infty$,

(2) $|Pg(x) - Pg(y)| \leqslant K[g]_p |x-y|(1+|x|^p+|y|^p)$,

(3) $|P^l g(x) - P^l g(y)| \leqslant \rho[g]_p |x-y|(1+|x|^p+|y|^p)$, (4.1.12)

那么转移函数为 P 的马氏链有惟一的不变概率 m, 且 $\int |x|^{p+1} m(\mathrm{d}x) < \infty$, 并有

(i) 存在 $M > 0, \alpha \in [0,1]$, 使得对于所有 $g \in L_i(p), x, n$

$$\left| P^n g(x) - \int g\mathrm{d}m \right| \leqslant M\alpha^n [g]_p (1+|x|^{p+1}),$$

(ii) 对 $g \in L_i(p)$, $u = \sum_{n \geqslant 0} (P^n g - \int g\mathrm{d}m)$ 是

$$(I-P)u = g - \int g\mathrm{d}m,$$

在 $L_i(p)$ 中使得 $\int u\mathrm{d}m = 0$ 的惟一解.

证明 由于函数 $\phi_p(x) = |x|^{p+1}$ 满足 $[\phi]_p < \infty$, 故有

$$\begin{aligned}|\mu_{p+1}(x) - \mu_{p+1}(x_0)| &\leqslant |P\phi_p(x) - P\phi_p(x_0)| \\ &\leqslant K[\phi]_p |x - x_0|(1+|x|^p+|x_0|^p),\end{aligned}$$

于是 $\mu_{p+1}(x_0) \leqslant M(1+|x|^{p+1})$; 另外, (4.1.12) 也可写为 $[Pg]_p \leqslant K[g]_p$,

于是$[P^n g]_p \leqslant K^n [g]_p$，因此存在常数 C，使得对 $k=1,2,\cdots,l-1$，

$$[P^K g]_p \leqslant C[g]_p. \tag{4.1.13}$$

类似地，每当$[P^{nl}g]_p \leqslant \rho^n [g]_p$ 时，(4.1.13)可写为$[P^l g]_p \leqslant \rho[g]_p$，记 $n=ql+k, k=0,1,\cdots,l-1$，就有

$$[P^n g]_p = [P^k P^{ql} g]_p \leqslant C[P^{ql}g]_p \leqslant C\rho^q [g]_p,$$

设 $C'=C\rho^{-k}, \alpha=\rho^{1/l}$，上式可重新写为

$$|P^n g(x) - P^n g(y)| \leqslant C'\alpha^n [g]_p |x-y|(1+|x|^p+|y|^p), \tag{4.1.14}$$

对于 $q=p+1$，命题 4.1.2 的条件(4.1.9)，(4.1.10)都成立；又由(4.1.12)，如果 ϕ 是C_∞有界，则 $P\phi$ 满足局部 Lipschitz 条件，因而连续. 命题 4.1.3 的第一部分被证明. 又 $u=\sum_{n\geqslant 0}\left(P^n g - \int g\mathrm{d}m\right)$ 是

$$(I-P)u = g - \int g\mathrm{d}m$$

在 $L_i(p)$ 中使得$\int u\mathrm{d}m = 0$ 的一个解(由 4.1.14) 可得. 最后得出如果 $\nu \in L_i(p)$，$(I-P)\nu = g - \int g\mathrm{d}m$，那么函数 $w = u - \nu \in L_i(p)$，且$(I-P)w = 0$，于是可以得到 $w = pw = \cdots = p^n w$ 收敛于$\int w\mathrm{d}m$，$w = \int w\mathrm{d}m$，并且 w 是一个常数.

§4.2　依赖于参数 θ 的马尔可夫链

考虑 R^k 上的转移概率族$(P_\theta, \theta \in Q)$，Q 为R^d 的子集. 给定 $R^d \times R^k$ 的函数$f(\theta,x)$，我们来研究 Poisson 方程

$$(I-P_\theta)\nu_\theta = f_\theta - R_\theta f_\theta$$

的解 ν_θ 关于θ 的正则性，我们知道 f_θ 表示映射$x \to f(\theta,x), x\in R^k$.

4.2.1　ν_θ 关于 θ 的 Holder 正则性

称函数 $f(\theta,x)$属于族 $L_i(Q,L_1,L_2,p_1,p_2)$，如果

(1) 对所有 $\theta\in Q, N_{p_1}(f_\theta)\leqslant L_1$.

(2) 对所有 $\theta,\theta'\in Q, x\in R^k$，

$$|f(\theta,x)-f(\theta',x)| \leqslant L_2|\theta-\theta'|(1+|x|^{p_2}). \tag{4.2.1}$$

$L_i(Q)$表示对 L_j, p_j 的某个值属于$L_i(Q,L_1,L_2,p_1,p_2)$的 f 的集合.

定理 4.2.1　给定 $p_1, p_2 \geqslant 0$，假定存在正常数 $K_1,K_2,K_3,p_1,p_2,\rho<$

1,使得

(1) 对所有 $g\in L_i(p_1),\theta\in Q,n\geqslant 0,x,y$

$$|P_\theta^n g(x)-P_\theta^n g(y)|\leqslant K_1\rho^n N_{p_1}(g)(1+|x|^{q_1}+|y|^{q_2}).$$

(2) 对所有,$\theta\in Q,n\geqslant 0,x,m\leqslant q_1\vee q_2$,

$$\int P_\theta^n(x,\mathrm{d}y)(1+|y|^m)\leqslant K_2(1+|x|^m).$$

(3)对所有 $g\in L_i(p_1),\theta,\theta'\in Q,n\geqslant 0,x\in R^k$,

$$|P_\theta^n g(x)-P_{\theta'}^n g(x)|\leqslant K_3N_{p_1}(g)|\theta-\theta'|(1+|x|^{q_2}),$$

则对族 $L_i(Q,L_1,L_2,p_1,p_2)$的任意函数 $f(\theta,x)$,存在函数 $h(\theta)$,ν_θ 和仅依赖于 L_j,p_j 的常数$C_1,C_2,C(\lambda),0<\lambda<1$,使得

(i) 对所有 $\theta,\theta'\in Q$,$|h(\theta)-h(\theta')|\leqslant C_1|\theta-\theta'|$.

(ii) 对所有,$\theta\in Q$,$|\nu_\theta(x)|\leqslant C_2(1+|x|^{q_1})$.

(iii) 对所有 $\theta,\theta'\in Q,\lambda\in(0,1)$和 $s=\max(p_2,q_1,q_2)$.

$$|\nu_\theta(x)-\nu_{\theta'}(x)|\leqslant C(\lambda)|\theta-\theta'|^\lambda(1+|x|^s),$$

$$|P_\theta\nu_\theta(x)-P_{\theta'}\nu_{\theta'}(x)|\leqslant C(\lambda)|\theta-\theta'|(1+|x|^s).$$

(iv) $(I-P_\theta)\nu_\theta=f_\theta-h(\theta)$.

4.2.2 定理 4.2.1 的意义

设D为R^d的一开子集,对D的每个紧子集Q,转移概率族$(P_\theta,\theta\in Q)$满足上述假设(1)、(2)、(3). 若$P_\theta H_\theta$属于$L_i(Q)$则族$L_i(Q)$的每个函数$H(\theta,x)$满足第三章的假设(A.4). 实际上对 $f_\theta=P_\theta H_\theta$ 应用定理 4.2.1,得到满足(i)、(ii)、(iii)的一个解 w_θ,取 $v_\theta=w_\theta+H_\theta-h(\theta)$即可(见 3.1.3 节关于(A.4)的注释 b). 正由于此,我们可以讨论 H_θ 不连续,而转移函数 $P_\theta H_\theta$ 有正则效应的情形.

4.2.3 定理4.2.1 的证明

设 $f(\theta,x)\in L_i(Q,L_1,L_2,p_1,p_2)$.

1. 固定 θ,由(2)对 $n=1$ 有

$$\mu_{q_1}(x)\leqslant K_2(1+|x|^{q_1}),$$

其中 μ_q 如(4.1.2)定义. 由(1),由于

$$N_{p_1}(f_\theta)\leqslant L_1,$$

$$|P_\theta^n f_\theta(x)-P_\theta^n f_\theta(y)|\leqslant L_1K_1\rho^n(1+|x|^{q_1}+|y|^{q_2}),$$

因此命题 4.1.2 的假设(4.1.9)、(4.1.10)满足,于是存在函数 $h(\theta)$(即

$R_\theta f_\theta$)和不依赖于 $\theta\in Q$ 的常数 K,使得对 $\theta\in Q$ 有

$$|P_\theta^n f_\theta(x) - h(\theta)| \leqslant L_1 K\rho^n(1 + |x|^{q_1}), \tag{4.2.2}$$

而且 $v_\theta(x) = \sum_{n\geqslant 0}|P_\theta^n f_\theta(x) - h(\theta)|$ 满足

$$(I - P_\theta)v_\theta = f_\theta - h(\theta),$$

又由(4.2.2)

$$|v_\theta(x)| \leqslant L_1 K(1-\rho)^{-1}(1 + |x|^{q_1}). \tag{4.2.3}$$

2. 对 $\theta,\theta'\in Q$,由(3)有

$$|P_\theta^n f_\theta(x) - P_{\theta'}^n f_{\theta'}(x)| \leqslant L_1 K_3|\theta - \theta'|(1 + |x|^{q_2}),$$

又由(2)和(4.2.1)得

$$\begin{aligned}|P_{\theta'}^n f_\theta(x) - P_{\theta'}^n f_{\theta'}(x)| &= |P_{\theta'}^n(f_\theta - f_{\theta'}(x))|\\ &\leqslant L_2|\theta - \theta'|\int P_{\theta'}^n(x,\mathrm{d}y)(1 + |x|^{p_2})\\ &\leqslant L_2K_2|\theta - \theta'|(1 + |x|^{p_2}).\end{aligned}$$

从而对 $L = \max(L_1K_3, L_2K_2)$, $q = \max(p_2, q_2)$,

$$|P_\theta^n f_\theta(x) - P_{\theta'}^n f_{\theta'}(x)| \leqslant L|\theta - \theta'|(1 + |x|^q), \tag{4.2.4}$$

如果考虑 $x=0$ 的情形,则令 n 趋于无穷,得到

$$|h(\theta) - h(\theta')| \leqslant L|\theta - \theta'|. \tag{4.2.5}$$

对 $\theta,\theta'\in Q$ 和任意正整数 N,由(4.2.2)、(4.2.4)、(4.2.5)有

$$\begin{aligned}|v_\theta(x) - v_{\theta'}(x)| &= \left|\sum_{n=0}^{\infty}(P_\theta^n f_\theta(x) - h(\theta) - P_{\theta'}^n f_{\theta'}(x) + h(\theta'))\right|\\ &\leqslant \left|\sum_{n=0}^{N-1}(|P_\theta^n f_\theta(x) - P_{\theta'}^n f_{\theta'}(x)| + |h(\theta) - h(\theta')|)\right|\\ &\quad + 2\sup_{\theta\in Q}\sum_{n=N}^{\infty}|P_\theta^n f_\theta(x) - h(\theta)|\\ &\leqslant 2[NL|\theta - \theta'| + L_1K(1-\rho)^{-1}\rho^N](1 + |x|^s),\end{aligned}$$

其中 $s = \max(q, q_1)$.

如果 $|\theta-\theta'|\geqslant 1$,(iii)从(2)直接可得. 因此设 $|\theta-\theta'|\leqslant 1$,既然上述不等式对所有 N 成立,取 $N = (\log|\theta-\theta'|/\log\rho) + u$,其中 $0\leqslant u<1$. 那么如果 $L' = L_1K(1-\rho)^{-1}$,由于对 $0\leqslant t\leqslant 1$, $|t\log t|\leqslant A(\lambda)t^\lambda$,故有

$$\begin{aligned}&NL|\theta - \theta'| + L'\rho^N\\ &\leqslant (\log|\theta - \theta'|/\log\rho)L|\theta - \theta'| + L|\theta - \theta'| + L'\rho^{\log|\theta-\theta'|/\log\rho}\\ &\leqslant K(\lambda)|\theta - \theta'|^\lambda + C|\theta - \theta'| \leqslant C(\lambda)|\theta - \theta'|^\lambda.\end{aligned}$$

对(iii)的第二个不等式,只需注意到

$$P_\theta v_\theta(x) = \sum_{n\geqslant 1}(P_\theta^n f_\theta(x) - h(\theta)),$$

即可得出.

4.2.4 v_θ 关于 θ 为 Lipschitz 的情形

我们将给出 Poisson 方程的解 v_θ 关于 θ 为 Lipschitz 的条件,我们仍然考虑取值于 R^k 的马氏链,$f(\theta,x)$ 是 $R^d\times R^k$ 上函数;注意到定义(4.1.6)、(4.1.7)、(4.1.8)和(4.2.1),如果 $f(\theta,x)$ 关于 x 可微,则 $f'(\theta,x)$ 表示关于 x 的梯度.称关于 x 可微的函数 $f(\theta,x)$ 属于族 $L_i^1(Q,L_1,L_2,p_1,p_2)$,如果

(1)对所有 $\theta\in Q$,

$$\left|f(\theta,0)+N_{p_1}(f'_\theta)\right|\leqslant L_1. \tag{4.2.6}$$

(2)对所有 $\theta,\theta'\in Q$,

$$|f(\theta,0)-f(\theta',0)|\leqslant L_2|\theta-\theta'|. \tag{4.2.7}$$

(3)对所有 $\theta,\theta'\in Q,x\in R^k$,

$$|f'(\theta,0)-f'(\theta',0)|\leqslant L_2|\theta-\theta'|(1+|x|^{p_2}). \tag{4.2.8}$$

容易看出这意味着

$$[f_\theta]_{p_1+1}\leqslant L_1 \tag{4.2.9}$$

对 L_2,p_2 的 L'_2 函数

$$|f(\theta,x)-f(\theta',x)|\leqslant L'_2|\theta-\theta'|(1+|x|^{p_2+1}) \tag{4.2.10}$$

如果 f 对 L_j,p_j 的某值属于 $L'_i(Q,L_1,L_2,p_1,p_2)$,称 f 属于族 $L_i^1(Q)$,显然 $L_i^1(Q)\subset L_i(Q)$.

定理 4.2.2 设对所有 $p\geqslant 0$,存在正常数 $K_j,q_j,\rho_j<1$,使得对任意可微函数 $g(x)$ 和所有 $n\geqslant 0,\theta,\theta'\in Q,x,y\in R^k$,

(1) $\int P^n(x,dz)(1+|z|^p)\leqslant K_1(1+|x|^p)$.

(2) $|P_\theta^n g(x)-P_\theta^n g(y)|\leqslant K_2[g]_p\rho_1^n|x-y|(1+|x|^p+|y|^p)$.

(3) $|P_\theta^n g(x)-P_{\theta'}^n g(x)|\leqslant K_3[g]_p\rho_1^n|\theta-\theta'|(1+|x|^{q_1})$.

(4) $|P_\theta^n g(x)-P_\theta^n g(y)-P_{\theta'}^n g(x)+P_{\theta'}^n g(y)|$
$\leqslant K_4 N_p(g')\rho_2^n|\theta-\theta'|(1+|x|^{q_2}+|y|^{q_2})$.

那么对所有属于 $L_i^1(Q,L_1,L_2,p_1,p_2)$ 的 $f(\theta,x)$,存在函数 $h(\theta)$,$v_\theta(x)$ 和仅依赖于 L_j,p_j 的常数 C_1,s,使得 $(I-P_\theta)v_\theta=f_\theta-h(\theta)$,对所有 $\theta,\theta'\in Q$,$x\in R^k$,

(i) $|h(\theta)-h(\theta')|\leqslant C_1|\theta-\theta'|$.

(ii) $|v_\theta(x)|\leqslant C_2(1+|x|^{q_1})$.

(iii) $|v_\theta(x)-v_{\theta'}(x)|\leqslant C_3|\theta-\theta'|(1+|x|^s)$.

(iv) $|P_\theta v_\theta(x)-P_{\theta'}v_{\theta'}(x)|\leqslant C_3|\theta-\theta'|(1+|x|^s)$.

注　4.2.2 节关于定理 4.2.1 的评论可逐句用于定理 4.2.2.

4.2.5　定理4.2.2 的证明

我们可以应用定理 4.2.1,特别注意到对 $g\in L_i(p)$,Pg 连续,因此带有转移函数 P_θ 的马氏链有惟一的不变概率测度 m_θ,而且 $h(\theta)=R_\theta f_\theta=\int f(\theta,x)m_\theta(\mathrm{d}x)$ 是 Lipschitz 的,且 $v_\theta=\sum_{n\geqslant 0}(P_\theta^n f_\theta-h(\theta))$,$P_\theta v_\theta=\sum_{n\geqslant 1}(P_\theta^n f_\theta-h(\theta))$,$v_\theta(x)$ 和 $P_\theta v_\theta(x)$关于 θ 是 Lipschitz 的.注意到

$$|v_\theta(x)-v_{\theta'}(x)|=u_1(\theta,\theta',x)+u_2(\theta,\theta',x),$$

其中

$$u_1(\theta,\theta',x)=\sum_{n\geqslant 0}(P_\theta^n f_\theta(x)-R_\theta f_\theta-P_{\theta'}^n f_\theta(x)+R_{\theta'}f_\theta),\tag{4.2.11}$$

$$u_2(\theta,\theta',x)=\sum_{n\geqslant 0}(P_{\theta'}^n(f_\theta-f_{\theta'})(x)-R_{\theta'}(f_\theta-f_{\theta'})).\tag{4.2.12}$$

对 $f\in L_i^1(Q,L_1,L_2,p_1,p_2)$,我们分别考虑 u_1 和 u_2.令 B_j,s_j 表示通过 L_j,p_j 仅仅依赖于 f 的常数.

1.考虑

$$\begin{aligned}A_n&=P_\theta^{n+1}f_\theta(x)-P_\theta^n f_\theta(x)-P_{\theta'}^{n+1}f_\theta(x)+P_{\theta'}^n f_\theta(x)\\&=\int P_\theta(x,\mathrm{d}y)\{P_\theta^n f_\theta(y)-P_\theta^n f_\theta(x)-P_{\theta'}^n f_\theta(y)+P_{\theta'}^n f_\theta(x)\}\\&=\int P_\theta(x,\mathrm{d}y)P_{\theta'}^n f_\theta(y)-\int P_{\theta'}(x,\mathrm{d}y)P_{\theta'}^n f_\theta(y)\\&=A_n^1+A_n^2.\end{aligned}$$

利用(4)和(1)有

$$\begin{aligned}|A_n^1|&\leqslant K_4N_{p_1}(f'_\theta)\rho''_2|\theta-\theta'|\int P(x,\mathrm{d}y)(1+|x|^{s_1}+|y|^{s_1})\\&\leqslant B_1\rho_2^n|\theta-\theta'|(1+|x|^{s_1}).\end{aligned}$$

因为$[f_\theta]_{p_1+1}\leqslant L_1$(从(4.2.9)),有(2);对所有 $\theta'\in Q$,有

$$[P_{\theta'}f_\theta]_{p_1+1}\leqslant K_2\rho_1^n[f_\theta]_{p_1+1}\leqslant B_2\rho_1^n.$$

利用(3)有

$$\begin{aligned}|A_n^2|&\leqslant K_3[P_{\theta'}f_\theta]_{p_1+1}|\theta-\theta'|(1+|x|^{s_2})\\&\leqslant B_3\rho_1^n|\theta-\theta'|(1+|x|^{s_2}).\end{aligned}$$

最后对 $\rho=\max\{\rho_1,\rho_2\}$得到

$$|A_n| \leqslant B_4\rho^n|\theta-\theta'|(1+|x|^{s_3}),$$
$$|P_\theta^{n+k}f_\theta(x)-P_\theta^n f_\theta(x)-P_{\theta'}^{n+k}f_\theta(x)+P_{\theta'}^n f_\theta(x)|$$
$$\leqslant B_4(1-\rho)^{-1}\rho^n|\theta-\theta'|(1+|x|^{s_3}).$$

令 $k\to\infty$ 得

$$|P_\theta^n f_\theta(x)-P_\theta f_\theta(x)-P_{\theta'}^n f_\theta(x)+P_{\theta'}f_\theta(x)|$$
$$\leqslant B_4(1-\rho)^{-1}\rho^n|\theta-\theta'|(1+|x|^{s_3}).$$

因而

$$u_1(\theta,\theta',x)\leqslant B_5|\theta-\theta'|(1+|x|^{s_3}). \tag{4.2.13}$$

2. 对 $\theta,\theta'\in Q$ 估计 $[f_{\theta'}-f_\theta]_{p_2}$,

$$|f(\theta,x)-f(\theta',x)+f(\theta,y)-f(\theta',y)|$$
$$=\left|(x-y)\int_0^1\{f'(\theta',x+t(y-x))-f'(\theta,x+t(y-x))\}\mathrm{d}t\right|$$
$$\leqslant B_6|x-y||\theta-\theta'|(1+|x|^{p_2}+|y|^{p_2}),$$

因而

$$[f_{\theta'}-f_\theta]_{p_2}\leqslant B_6|\theta-\theta'|.$$

由(2)

$$|P_{\theta'}^n(f_\theta-f_{\theta'})(x)-P_{\theta'}^n(f_\theta-f_{\theta'})(y)|$$
$$\leqslant B_7\rho_1^n|x-y|(1+|x|^{p_2+1}+|y|^{p_2+1}),$$

利用引理 4.1.1 和(1)得

$$|P_{\theta'}^n(f_\theta-f_{\theta'})(x)-P_{\theta'}(f_\theta-f_{\theta'})|$$
$$\leqslant B_8\rho_1^n|x-y|(1+|x|^{p_2+1}),$$

立即得出

$$u_2(\theta,\theta',x)\leqslant B_9|\theta-\theta'|(1+|x|^{p_2+1}). \tag{4.2.14}$$

不等式(4.2.13)和(4.2.14)意指(iii).

4.2.6 转移概率 P_θ 不依赖于 θ 情形

许多算法的转移概率 P_θ 不依赖于 θ,且参数 θ 只在 $H(\theta,x)$ 中出现.这样定理 4.2.1 和定理 4.2.2 的证明就可以大大地被简化;两种情况转移概率 P 只需满足(1)和(2)就够了.要获得全局性的结果,利用第一章的定理 3.7.1 更为容易(见(3.7.4)和(3.7.5)).讨论中我们将利用下面的定理.

关于 x 可微的函数 $f(\theta,x)$ 称为属于 $\bar{L}_i(R^d,L_1,L_2,p_1,p_2)$,如果对于所有 $\theta,\theta''\in R^d$, $x,y,z\in R^k$,满足

$$|f(\theta,x)-f(\theta,y)|\leqslant L_1(1+|\theta|)|x-y|(1+|x|^{p_1}+|y|^{p_1}). \tag{4.2.15}$$

$$|f(\theta,0)-f(\theta',0)|\leqslant L_2|\theta-\theta'|. \tag{4.2.16}$$

$$|f'(\theta,x)-f'(\theta',x)|\leqslant L_2|\theta-\theta'|(1+|x|^{p_1}). \tag{4.2.17}$$

如果该函数对 L_j,p_j 的某值属于 $\overline{L}_i(R^d,L_1,L_2,p_1,p_2)$，就称它属于族 $\overline{L}_i(R^d)$.

定理 4.2.3　令 P 为 R^k 上的转移概率.设对于所有的 $p\geqslant 0$，存在正常数 $K_1,K_2,\rho<1$，使得对所有 $g\in L_i(p),n\geqslant 0,x,y,z\in R^k$，有

(1) $\int P^n(x,\mathrm{d}y)(1+|y|^p)\leqslant K_1(1+|x|^p)$.

(2) $|P^ng(x)-P^ng(y)|\leqslant K_2\rho^n[g]_p|x-y|(1+|x|^p+|y|^p)$.

则对所有属于族 $\overline{L}_i(R^d,L_1,L_2,p_1,p_2)$ 的 $f(\theta,x)$，存在函数 $h(\theta)$，v_θ 和仅依赖于 L_j,p_j 的常数 C_i，使得 $(I-P)v_\theta=f_\theta-h(\theta)$，对所有 $\theta,\theta'\in R^d$，

$$|h(\theta)-H(\theta')|\leqslant C_1|\theta-\theta'|,$$

$$|v_\theta(x)|\leqslant C_2(1+|x|^{p_1+1})(1+|\theta|),$$

$$|v_\theta(x)-v_{\theta'}(x)|\leqslant C_3|\theta-\theta'|(1+|x|^{p_2+1}),$$

$$|Pv_\theta(x)-Pv_{\theta'}(x)|\leqslant C_3|\theta-\theta'|(1+|x|^{p_2+1}).$$

证明　$v_\theta(x)$的上界从引理 4.1.1 可得，$|v_\theta-v_{\theta'}|$的上界可如同 4.2.5 一样地考虑 $u_2(\theta,\theta',x)$得到.

§4.3　线性动力系统

我们考虑取值于 R^k 的过程(X_n)，其定义如下

$$X_{n+1}=A(\theta)X_n+B(\theta)W_{n+1},$$

其中 $A(\theta)$为 $k\times k$ 矩阵，$B(\theta)$为 $k\times k'$矩阵，(W_n)为取值于 R^k 的独立同分布随机变量列.我们将证明在适当的正则假定下，与这样的马氏链相关的转移概率族(P_θ)满足定理 4.2.1 和定理 4.2.2 的条件.因而第三章的结果可用于这些过程.

4.3.1　假设和记号

设对所有 $p\geqslant 0$，

$$\|W_n\|_p\leqslant\mu_p<\infty. \tag{4.3.1}$$

令 Q 表示R^k 的一个子集，设存在正常数 $\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2,M,0<\rho<1$，使得对所有 $\theta,\theta'\in Q,n\geqslant 0$，

$$|A(\theta)|\leqslant\alpha_1,\quad |A(\theta)-A(\theta')|\leqslant\alpha_2|\theta-\theta'|, \tag{4.3.2}$$

$$|A^n(\theta)|\leqslant M\rho^n,$$

$$|B(\theta)|\leqslant\beta_1,\quad |B(\theta)-B(\theta')|\leqslant\beta_2|\theta-\theta'|,\tag{4.3.4}$$

$$U_n(\theta)=\sum_{k=1}^{n}A^{n-k}(\theta)B(\theta)W_k,\tag{4.3.5}$$

$$V_n(\theta)=\sum_{k=1}^{n}A^{k-1}(\theta)B(\theta)W_k,\tag{4.3.6}$$

$$P_\theta g(x)=E\{g(A(\theta)x+B(\theta)W_1)\}.\tag{4.3.7}$$

注意到由$\{W_1,W_2,\cdots,W_n\}$的分布的对称性,随机变量$U_n(\theta)$和$V_n(\theta)$是同分布的,于是易证

$$P_\theta^n g(x)=E\{g(A^n(\theta)x+U_n(\theta))\}=E\{g(A^n(\theta)x+V_n(\theta))\}.\tag{4.3.8}$$

4.3.2 预备结果

引理4.3.1 对所有的 $p\geqslant0$,存在常数 K_1,K_2,使得对所有 $\theta,\theta'\in Q,n\geqslant0$,

(1) $\|U_n(\theta)\|_p\leqslant K_1$.

(2) $\|U_n(\theta)-U_n(\theta')\|\leqslant K_2|\theta-\theta'|$.

另外对每个 $\theta\in Q$, $V_n(\theta)$ $a.s.$收敛,且 L^p 收敛于 $V_\infty(\theta)$.

证明 因为

$$\begin{aligned}\|U_n(\theta)\|_p&\leqslant\sum_{k=1}^{n}\|A^{n-k}(\theta)B(\theta)W_k\|_p\\&\leqslant\sum_{k=1}^{n}|A^{n-k}(\theta)\|\ \|B(\theta)\|\ \|W_k\|_p\\&\leqslant M\beta_1\sum_{k=1}^{n}\rho^{n-k}\mu_p\\&\leqslant M\beta_1(1-\rho)^{-1}\mu_p.\end{aligned}$$

再注意到如果 A_1 和 A_2 为方阵(不必可交换),则

$$A_1^n-A_2^n=\sum_{k=1}^{n}A_1^{n-k}(A_1-A_2)A_2^{k-1}\tag{4.3.9}$$

$$\begin{aligned}U_n(\theta)-U_n(\theta')&\leqslant\sum_{k=1}^{n}(A^{n-k}(\theta)-A^{n-k}(\theta'))B(\theta)W_k\\&\quad+\sum_{k=1}^{n}A^{n-k}(\theta')(B(\theta)-B(\theta'))W_k\\&=Z'_n(\theta,\theta')+Z''_n(\theta,\theta').\end{aligned}$$

因为

$$|A^{n-k}(\theta)-A^{n-k}(\theta')| = \left|\sum_{i=1}^{n-k}A^{n-k-i}(\theta)(A(\theta)-A(\theta'))A^{i-1}(\theta')\right|$$
$$\leqslant |A(\theta)-A(\theta')|\sum_{i=1}^{n-k}|A^{n-k-i}(\theta)\|A^{i-1}(\theta')|$$
$$\leqslant \alpha_2|\theta-\theta'|M^2(n-k)\rho^{n-k-1},$$

故

$$\|Z'_n(\theta,\theta')\|_p \leqslant \beta_1\mu_1\alpha_2|\theta-\theta'|M^2\sum_{k=1}^{n}(n-k)\rho^{n-k-1}$$
$$\leqslant K_3(\rho)|\theta-\theta'|,$$
$$\|Z''_n(\theta,\theta')\|_p \leqslant \beta_2\mu_p|\theta-\theta'|M\sum_{k=1}^{n}\rho^{n-k}$$
$$\leqslant K_4(\rho)|\theta-\theta'|.$$

从而

$$\|U_n(\theta)-U_n(\theta')\|_p \leqslant K_2(\rho)|\theta-\theta'|.$$

于是 $V_n(\theta)$为独立随机变量,且 $\sup_m\{\|U_n(\theta)\|_p\}$是有限的.从而 $V_n(\theta)$ $a.s.$收敛,且 L^p 收敛于 $V_\infty(\theta)$.

作为引理的结果,若记随机变量 $V_\infty(\theta)$的分布为 m_θ,由 $A^n(\theta)x$ 收敛到零,从(4.3.8)可得对任意有界连续函数 $g(x)$,$P_\theta^n g(x)$趋于 $\int g(x)\mathrm{d}m_\theta(x) = R_\theta g$. 容易看出 m_θ 是转移概率为 P_θ 的马尔可夫链的惟一不变概率,这点也可以从命题 4.1.2 以及 4.3.3 节将要建立的 P_θ^n 的性质得出.

4.3.3　P_θ^n 的性质

引理 4.3.2　对所有的 $p\geqslant 0$,存在常数 $C_1,C_2,C_3,C_4,0<\rho_1<1$,使得对所有的 $\theta,\theta'\in Q;x,y\in R^k,n\geqslant 0,g$,

(a) $\int P_\theta^n(x,\mathrm{d}y)(1+|y|^p)\leqslant C_1(1+|x|^p)$.

(b) $|P_\theta^n g(x)-P_\theta^n g(y)|\leqslant C_2[g]_p\rho^n|x-y|(1+|x|^p+|y|^p)$.

(c) $|P_\theta^n g(x)-P_{\theta'}^n g(x)|\leqslant C_3[g]_p|\theta-\theta'|(1+|x|^{p+1})$.

(d) $|P_\theta^n g(x)-P_\theta^n g(y)-P_{\theta'}^n g(x)+P_{\theta'}^n g(y)|\leqslant C_4N_p(g')\rho_1^n|x-y|(1+|x|^{p+1}+|y|^{p+1})$.

证明　不等式(a)

$$\int P_\theta^n(x,\mathrm{d}y)(1+|y|^p) = E[1+|A^n(\theta)x+U_n(\theta)|^p]$$
$$\leqslant C(p)[1+M|x|^p+E|U_n(\theta)|^p]$$

$$\leqslant C_1(p)(1+|x|^p).$$

不等式(b)

$$\begin{aligned}
&|P_\theta^n g(x) - P_\theta^n g(y)| \\
&= |E[g(A^n(\theta)x + U_n(\theta)) - g(A^n(\theta)y + U_n(\theta))]| \\
&= [g]_p |A^n(\theta)\| x - y| E[1 + |A^n(\theta)x + U_n(\theta)|^p \\
&\quad + |A^n(\theta)y + U_n(\theta)|^p] \\
&\leqslant MC(p)[g]_p \rho^n |x-y|(1+|x|^p+|y|^p).
\end{aligned}$$

不等式(c)

$$\begin{aligned}
&|P_\theta^n g(x) - P_{\theta'}^n g(y)| \\
&= |E[g(A^n(\theta)x + U_n(\theta)) - g(A^n(\theta')x + U_n(\theta'))]| \\
&\leqslant [g]_p |E\{[|A^n(\theta) - g(A^n(\theta')\| x| + |U_n(\theta)) - U_n(\theta')|] \\
&\quad [1 + |A^n(\theta)x + U_n(\theta)|^p + |A^n(\theta')x + U_n(\theta')|^p]\} \\
&\leqslant [g]_p \||A^n(\theta) - (A^n(\theta')\| x| \\
&\quad + |U_n(\theta) - U_n(\theta')\||_2 C(p)(1+|x|^p) \\
&\leqslant C(p)[g]_p [M^2\alpha_2 |\theta - \theta'| n\rho^{n-1}|x| \\
&\quad + \|U_n(\theta)) - U_n(\theta')\|_2](1+|x|^p) \\
&\leqslant C_3(p)|\theta - \theta'|(1+|x|^{p+1})
\end{aligned}$$

(这里利用(4.3.9)估计$|A^n(\theta)-(A^n(\theta')|$).

不等式(d),我们必须估计

$$\begin{aligned}
a = &|E[g(A^n(\theta)x + U_n(\theta)) - g(A^n(\theta)y + U_n(\theta)) \\
&- g(A^n(\theta')x + U_n(\theta')) - g(A^n(\theta')y + U_n(\theta'))]| \\
= &\Big| E[A^n(\theta)(y-x)\int_0^1 g'[A^n(\theta)x + U_n(\theta) + tA^n(\theta)(y-x)]dt \\
&- A^n(\theta')(y-x)\int_0^1 g'[A^n(\theta')x + U_n(\theta') + tA^n(\theta')(y-x)]dt \Big| \\
\leqslant &E\Big\{|A^n(\theta) - A^n(\theta')\| y - x|\int_0^1 \Big| g'[A^n(\theta)x + U_n(\theta) \\
&+ tA^n(\theta)(y-x)]\Big| dt\Big\} \\
&+ E\Big\{|A^n(\theta')\| y - x|\int_0^1 \Big| g'[A^n(\theta)x + U_n(\theta) + tA^n(\theta)(y-x)] \\
&- g'[A^n(\theta')x + U_n(\theta') + tA^n(\theta')(y-x)]\Big| dt\Big\} \\
\equiv &b + c,
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
b \leqslant & M^2\alpha_2|\theta-\theta'|n\rho^{n-1}|y-x|N_p(g') \\
& \cdot E\left\{\int_0^1[1+|A^n(\theta)x+U_n(\theta)+tA^n(\theta)(y-x)|^{p+1}]\mathrm{d}t\right\} \\
\leqslant & C(p)\rho_1^n|\theta-\theta'||y-x|N_p(g')(1+|x|^{p+1}+|y|^{p+1}), \\
c \leqslant & M\rho^n|y-x|N_p(g') \\
& \int_0^1 E\{[|A^n(\theta)-A^n(\theta')||x|+|U_n(\theta)-U_n(\theta')|+t|A^n(\theta) \\
& -A^n(\theta')||y-x|][1+|A^n(\theta)x+U_n(\theta)+tA^n(\theta)(y-x)|^p \\
& +|A^n(\theta')x+U_n(\theta')+tA^n(\theta')(y-x)|^p]\}\mathrm{d}t \\
\leqslant & C(p)\rho^n|\theta-\theta'|n|y-x|N_p(g')(1+|x|^{p+1}+|y|^{p+1}).
\end{aligned}
$$

于是完成了引理的证明.

4.3.4　验证假设(A.4)

考虑算法

$$
\begin{aligned}
\theta_{n+1} &= \theta_n+\gamma_{n+1}H(\theta_n,X_{n+1}), \\
X_{n+1} &= A(\theta)X_n+B(\theta)W_{n+1}.
\end{aligned}
\tag{4.3.10}
$$

在引理 4.3.2 中建立的(P_θ)的性质使我们能够运用定理 4.2.1 和定理 4.2.2,得到下面命题.

命题 4.3.3　令 D 为 R^d 的一个子集.设序列(W_n)满足(4.3.1);并且对 D 的任意紧子集 Q,矩阵 $A(\theta)$ 和 $B(\theta)$ 满足(4.3.2)、(4.3.3);那么如果 $H(\theta,x)$ 或 $P_\theta H_\theta(x)$ 属于族 $L_i(Q)$(见 4.2.1 节)(或属于族 $L_i^1(Q)$,见 4.2.4 节),对 D 的任意紧子集 Q,算法(4.3.10)满足(A.4),对所有 $\lambda<1$(对 $\lambda=1$,见 3.1.3 节).

如果现在我们考虑其动力系统不依赖于 θ 的算法

$$
\begin{aligned}
\theta_{n+1} &= \theta_n+\gamma_{n+1}H(\theta_n,X_{n+1}), \\
X_{n+1} &= AX_n+BW_{n+1}.
\end{aligned}
\tag{4.3.11}
$$

利用定理 4.2.3 得到下列算法.

命题 4.3.4　设序列(W_n)满足(4.3.1),且对 $0<\rho<1$,$|A^n|\leqslant M\rho^n$.则如果 $H(\theta,x)$ 或 $P_\theta H_\theta(x)$ 属于族 $L_i(R^d)$(见 4.2.6 节),算法(4.3.11)对 $\lambda=1$ 满足第三章的假设(3.7.3)、(3.7.4)和(3.7.5).

§4.4 例　　子

4.4.1 接收信号的马尔可夫表示

我们以向量

$$Y_n^{\mathrm{T}} = (y_{n+N}, \cdots, y_{n-N}), \tag{4.4.1}$$

表示在 $n-N, \cdots, n+N$ 时刻接受到的信号,其中 $N \geqslant 0$ 为固定整数. 设收到的信号 y_n 有马尔可夫表示

(1) $U_n = AU_{n-1} + Ba_n$.

(2) $y_{n+N} = CU_{n-1} + v_n$. (4.4.2)

以上 A,B 和 C 为有适当维数的矩阵,且 A 的特征值的模严格小于 1,(a_n, v_n)为独立同分布的随机变量列,其中 a_n 和 v_n 相互独立,取值于 $E \times R$,E 为 R 的某个有限子集. 我们假设 $\mathrm{var}(v_1)$不等于零,并且对所有 $p \geqslant 0$,$E|v_1|^p < \infty$. 设

(1) $\eta_n^{\mathrm{T}} = (a_n, \cdots, a_{n-N})$, (4.4.3)

引入"状态向量"

(2) $X_n = (U_n, Y_n, \eta_n)$,

X_n 是 R^M 中的向量,记 R^M 的一般点 x 为

(3) $x = (u, Y, \bar{a}_N, \cdots, \bar{a}_0)$.

容易看出

(1) $X_{n+1} = D_1 X_n + D_2 W_{n+1}$,

其中

(2) $|D_1^n| \leqslant M\rho^n, 0 < \rho < 1$, (4.4.4)

(3) $W_n^{\mathrm{T}} = (a_n, \cdots, v_n)$.

那么由 D_1 与 A 有相同的特征值可得(4.4.4-(2)). §4.3 的结果意指马尔可夫链(X_n)有惟一不变概率 m,且

(1) $\int g(x)\mathrm{d}m(x) = E\{g(X_\infty)\}$;

(2) $X_\infty = \sum_{k \geqslant 1} D_1^{k-1} D_2 W_k$; (4.4.5)

(3) $X_\infty = (U_\infty, Y_\infty, a_N^\infty, \cdots, a_0^\infty)$.

最后注意到如果设

$$R_* = E\{Y_\infty Y_\infty^{\mathrm{T}}\}. \tag{4.4.6}$$

则矩阵 R_* 正定. 实际上,如果把 W_n^{T} 写成形式 $W_n^{\mathrm{T}} = (a_n, 0) + (0, v_n)$,则可看出

$$y_\infty = (Y^1_\infty + Y^2_\infty),$$

其中 Y^1_∞ 与 Y^2_∞ 相互独立,且 $E\{Y^1_\infty(Y^2_\infty)^{\mathrm{T}}\} = \mathrm{var}(v_1)\cdot I$.

4.4.2 横向均衡器,学习阶段

考虑下列算法

$$\theta_{n+1} = \theta_n + \gamma_{n+1} Y_{n+1}(a_{n-N} - \theta_n^{\mathrm{T}} \cdot Y_{n+1}), \tag{4.4.7}$$

其中 Y_n 由(4.4.1)给出,且满足于 4.4.1 节的假设.这是一个线性动力系统的算法,不依赖于 θ,属于(4.3.11)类型,用(4.4.3-3)的记号,有 $H(\theta, Y) = Y\cdot(\bar{a}_0 - \theta^{\mathrm{T}}\cdot Y)$,$H(\theta, x)$ 属于族 $\bar{L}_i(R^d)$(见 4.2.6 节),由命题 4.2.4,对 $\lambda = 1$ 可运用定理 3.7.1-b.故考虑(4.4.5)和(4.4.6),得到

$$\begin{aligned} &(1)\ h(\theta) = E\{Y_\infty\cdot a_0^\infty\} - R_*\theta; \\ &(2)\ \theta_* = R_*^{-1}E\{Y_\infty\cdot a_0^\infty\}; \\ &(3)\ U(\theta) = (\theta - \theta_*)^{\mathrm{T}}\cdot R_*\cdot(\theta - \theta_*). \end{aligned} \tag{4.4.8}$$

如果 $\sum \gamma_n^2 < \infty$,则可得出 $\theta_n \to \theta_*$.

4.4.3 最小二乘算法

考虑下面形式的算法

$$\begin{aligned} &(1)\ \theta_{n+1} = \theta_n + \gamma_{n+1} R_{n+1}^{-1} Y_{n+1}(a_{n-N} - \theta_n^{\mathrm{T}}\cdot Y_{n+1}), \\ &(2)\ R_{n+1} = R_n + \gamma_{n+1}(Y_{n+1}Y_{n+1}^{\mathrm{T}} - R_n). \end{aligned} \tag{4.4.9}$$

其中 Y_n 满足 4.4.1 节的假设,且 $\sum \gamma_n^2 < \infty$.

若 R_0 选为对称的,则可假设 R_n 也是对称的矩阵,那么算法(4.4.9)就取值于 $R^{2N+1}\times R^{(2N+1)(2N+2)/2}$,其中 $2N+1$ 阶的对称矩阵的集合 M_s 等同于 $R^{(2N+1)(2N+2)/2}$,记 M_s 中正定矩阵构成的子集为 M_s^+.

首先注意到 R_n 几乎必然收敛于 R_*,R_* 如(4.4.6)定义.实际上,第三章的定理 3.7.1-b 可被利用,其中

$$h(R) = -(R - R_*), \qquad U(R) = \| R - \dot{R}_* \|^2. \tag{4.4.10}$$

再注意到 Y_n 所有阶的矩关于 n 有界,且

$$E\{\sum(\gamma_n^{1/2}|Y_n\cdot Y_n^{\mathrm{T}}|)^4\} \leqslant K_1\sum\gamma_n^2.$$

所以 $\gamma_n^{1/2}Y_n\cdot Y_n^{\mathrm{T}}$ 几乎必然收敛.(4.4.10)由 $R_*\in M_s^+$ 可构造一从 M_s 到 M_s^+ 的正则函数 u 使得

$$\begin{aligned} &(1)\ \forall R, |u(R)| \leqslant K_2 \leqslant \infty. \\ &(2)\ \{|R - R_*| \leqslant \beta\} \Rightarrow \{u(R) = R^{-1}\}. \end{aligned} \tag{4.4.11}$$

类似可构造一从 M_s 到 M_s 的正则映射 v,满足

(1) $\forall R, |v(R)| \leqslant K_3 < \infty$.

(2) $\{|R| \leqslant 1, -1/2 \leqslant \alpha \leqslant 1/2\} \Rightarrow \{(1+\alpha R)^{-1} = I - \alpha R + \alpha^2 v(R)\}$.

$$(4.4.12)$$

引入算法

(1) $\theta_{n+1} = \theta_n + \gamma_{n+1} u(R_n) S_{n+1}(a_{n-N} - \theta_n^{\mathrm{T}} \cdot Y_{n+1})$,

(2) $R_{n+1} = R_n + \gamma_{n+1}(Y_{n+1} Y_{n+1}^{\mathrm{T}} - R_n)$,

$$S_{n+1} = I + \gamma_{n+1}(I - Y_{n+1} Y_{n+1}^{\mathrm{T}} u(R_n)) + \gamma_{n+1} v[\gamma_{n+1}^{1/2}(Y_{n+1} Y_{n+1}^{\mathrm{T}} u(R_n) - I)]. \tag{4.4.13}$$

对 $\alpha = \gamma_{n+1}^{1/2}$ 和 $R = \gamma_{n+1}^{1/2}(Y_{n+1} Y_{n+1}^{\mathrm{T}} u(R_n) - I)$,由(4.4.12-(2))当

$$\gamma_{n+1}^{1/2} \leqslant 1/2,$$

$$\gamma_{n+1}^{1/2} |Y_{n+1} Y_{n+1}^{\mathrm{T}} u(R_n)| \leqslant 1/2K_2, \tag{4.4.14}$$

我们有

$$S_{n+1} = \{I + \gamma_{n+1}(Y_{n+1} Y_{n+1}^{\mathrm{T}} u(R_n) - I)\}^{-1},$$

则由(4.4.11-2),如果 $|R - R_*| \leqslant \beta$,则有

$$u(R_n) S_{n+1} = R_n^{-1}\{I + \gamma_{n+1}(Y_{n+1} Y_{n+1}^{\mathrm{T}} u(R_n) - I)\} = R_{n+1}^{-1}, \tag{4.4.15}$$

那么由 $R \rightarrow R_*$ 和(4.4.10)的收敛性,存在一个时刻 n_0(随机的),此时刻后算法(4.4.9)和(4.4.13)一致.因此证明(4.4.13)对任何初始条件都 $a.s.$ 收敛就够了.但是如果设

$$\Theta_n = (\theta_n, R_n) \tag{4.4.16}$$

算法(4.4.13)则为公式(3.1.1).利用定理 4.2.3(或命题 4.3.4 含 $\gamma_{n+1}^2 \rho_n(\theta_n, X_{n+1})$ 的变形)立即看出下面函数是满足第三章的定理3.7.1的假设(3.7.1)到(3.7.5).

(1) $h(\Theta) = (H_1(\Theta), h_2(\Theta))$.

(2) $h_1(\Theta) = -u(R)(R_* \theta - \zeta)$.

(3) $h_2(\Theta) = -(R - R_*)$.

(4) $\zeta = E\{Y_\infty \cdot a_0^\infty\}$. $\quad (4.4.17)$

(见(4.4.5)).为了能够运用第三章的定理 3.7.1-b,设

$$U(\theta) = (\theta - \theta_*)^{\mathrm{T}} \cdot R_* \cdot (\theta - \theta_*) + (R - R_*)^{\mathrm{T}}(R - R_*), \tag{4.4.18}$$

其中 $\theta_* = R_*^{-1} \cdot \zeta$.实际上,如果 U'_1 表示关于 θ 的梯度,U'_2 表示关于 R 的梯度,则有

$$U'(\Theta) h(\Theta) = U'_1(\Theta) \cdot h_1(\Theta) + U'_2(\Theta) \cdot h_2(\Theta)$$

$$
\begin{aligned}
&= -2(\theta - \theta_*)^{\mathrm{T}} R_*^{\mathrm{T}} u(R) R_* (\theta - \theta_*) \\
&\quad - 2(R - R_*)^{\mathrm{T}}(R - R_*),
\end{aligned}
$$

那么由于对所有 R，$R_*^{\mathrm{T}} u(R) R_* \in M_s^+$，从而除 $\theta = \theta_*$ 和 $R = R_*$ 外 $U'(\Theta) \cdot h(\Theta) < 0$. 这就证明了(4.4.9)定义的 θ_n $a.s.$ 收敛于 $\theta_* = R_*^{-1} \cdot \zeta$.

第五章　遗 传 算 法

遗传算法(genetic algorithms)是一类模拟达尔文自然进化论与孟代尔遗传变异理论的仿生优化技术,它借喻生物进化过程特别是遗传学的术语与原理求解问题,具有生物基础坚实,认知科学鲜明(它提供从智能生成过程观点对生物智能的模拟)和对任何函数(特别可以无表达式或有表达式而不可能精确计算的函数类)可用等突出特点.

遗传算法的产生归功于美国 Michigan 大学的 Holland[13]在 20 世纪 60 年代末,70 年代初的开创性工作. 近十几年来,遗传算法不论是在应用上,还是在基础理论上都取得了长足的发展. 已成为信息科学、计算机科学、运筹学和应用数学等诸多学科所共同关注的热点研究领域,近期研究主要是围绕如何提高算法效率和建立算法理论基础. 本章介绍遗传算法的一些数学基础理论. §5.1 介绍遗传算法的基本概念; §5.2 定义经典遗传算法的遗传算子(选择算子、变异算子和杂交算子)及其有关性质; §5.3 将遗传算法机制纳入随机过程分析的框架; §5.4 讨论遗传算法的 Markov 链模型.

§5.1　基 本 概 念

遗传算法是一种仿生算法,它是从一个初始群出发,不断重复执行选择,杂交和变异的过程,使种群进化越来越接近某一目标.

定义 5.1.1(个体和个体空间)　所谓 l 个体 i 是长度为 l 的 0 和 1 字符串,简称个体; l 称作个体的链长, l 个体的全体记作 $I=\{0,1\}^l$,称为个体空间.

按照遗传学的术语,个体也称作染色体(chromosome),个体的分量称作基因的位置(gene 或 locus),分量的可能取值称作等位基因(allele).

例 5.1.1(函数优化问题)　给定目标函数 $F(x):R^n\to R$ 及优化问题:

$$\max\{F(x):x\in R^n\}.$$

遗传算法是通过操作可行解 $x\in R^n$ 的 0-1 字符串编码求解优化问题. 因此遗传算法所求解的优化问题为:

$$\max\{f(i):i\in\{0,1\}^l\},$$
$$f(i)=S(F(e^{-1}(i))),$$

其中 $e(\cdot):R^n\to\{0,1\}^l$ 为编码映射, S 是 R 到 R^+ 的增函数. $f(\cdot)$称作适应值函数, $f(x)$称作 x 的适应值. 通常采用的编码映射为固定长度的二进制编码,

即把任何一个可行解表示为长度固定的二进制近似.

一般地,一个个体的分量可以在$\{0,1,\cdots,a\}$中取值,这时个体空间为$I=\{0,1,\cdots,a\}^l$.

定义 5.1.2 (种群和种群空间)　所谓 m 种群,是 m 个个体组成的集合(个体允许重复),简称种群,m 称作种群规模,称

$$I^m = \{x : x = (x_1,\cdots,x_m),\quad x_k \in I,\quad 1 \leqslant k \leqslant m\}.$$

为 m 种群空间.

在以下的叙述中,我们将不加特别指明地交替使用种群的集合形式,向量形式.记号 $x \subset A \subset I$ 表示 x 作为一个集合包含在 A 中.

定义 5.1.3 (母体与母体空间)　所谓母体就是一对个体,对一对个体通过繁殖产生新个体(即后代),用 $I^2=\{(i,j): i,j\in I\}$ 表示所有母体,称作母体空间.

定义 5.1.4 (齐次种群)　种群 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_m)$ 被称为是齐次种群,如果 $\forall 1\leqslant s,t\leqslant m, x_s=x_t$.用 U^m 表示规模为 m 的一致种群全体.用$|A|$表示包含在集合 A 中的元素个数.

遗传算法操作的对象是种群,它模拟自然演化中的选择,繁殖与变异等机制,通过种群的迭代来搜索全局优化问题的最优解.遗传算法的实施有多种方式,我们将讨论最基本的两种.

(A)标准遗传算法(canonical genetic algorithm,CGA)[14]

(1) 置 $t=0$,随机产生初始种群 $X(0)=(X_1,(0),X_2(0),\cdots,X_m(0))$;

(2) 独立地从当前种群中选取 m 对母体;

(3) 独立地对于 m 对母体进行杂交得到 m 个中间个体;

(4) 独立地对杂交后的 m 个个体进行变异,得到下代种群

$$X(t+1) = (X_1(t+1),X_2(t+1),\cdots,X_m(t+1));$$

(5) 若停止准则满足,则停止;否则置 $t=t+1$,并返回到(2).

(B)杰出选择遗传算法(elitist selection genetic algorithm ESGA)[14]

(1) 置 $t=0$,随机产生初始种群 $X(0)=(X_1(0),X_2(0),\cdots,X_m(0))$;

(2) 独立地从当前种群中选取 $m-1$ 对母体;

(3) 独立地对 $m-1$ 对母体进行杂交得到 $m-1$ 个中间个体;

(4) 独立地对杂交后的 $m-1$ 个个体进行变异,得到下代种群的前 $m-1$ 个个体

$$X_1(t+1),X_2(t+1),\cdots,X_{m-1}(t+1);$$

(5) 计算 $i=\arg\max\{f(X_j(t)):j=1,\cdots,m\}$,令

$$X_m(t+1) = X_i(t);$$

(6)若停止准则满足,则停止;否则置 $t=t+1$,并返回到(2).

在杰出选择遗传算法中,$i=\arg\max\{f(X_j(t):j=1,\cdots m\}$ 表示使 $f(X_j(t))$ 取最大值的个体为 $X_i(t)$.

§5.2 遗传算子及其性质

遗传算子解决种群到新种群的产生方法,它是遗传算法对自然演化中种群更替机制的类比与抽象,通过作用于当前种群,产生新种群,以达到搜索全局最优解的目的.常见的遗传算子有选择,杂交和变异.给定概率空间($\Omega,\mathscr{F},P$),小写字母 x,y,a,b 等表示确定性种群,大写字母 X,Y 等表示随机种群,$R(I^m)$ 是取值于 I^m 的随机种群全体.下面给出选择,变异和杂交算子的定义.

定义 5.2.1(比例选择算子) 比例选择算子是一个随机映射 $S:I^m\to R(I^{m'})$ 满足:$\forall x\in I^m$,随机种群 $S(x)=(Y_1,\cdots,Y_{m'})\in I^{m'}$ 由 m' 次独立重复实验产生,随机个体 Y_k 的概率分布为

$$P\{Y_k=i\}=\frac{x(i)f(i)}{\sum\limits_{j\in x}f(j)},\qquad i\in I,1\leqslant k\leqslant m'.$$

这里 $x(i)$ 是种群 x 中含个体 i 的个数.

特别当 $m'=2$ 时,称它为母体选择算子.令

$$B^*=\{i\in I:f(i)\geqslant f(j),\forall j\in I\},$$

$$n(x)=|x\cap B^*|,$$

$$\rho\equiv\max\{f(i)/f(j):f(i)<f(j),i,j\in I\}<1.$$

B^* 中的个体称为优化问题的全局最优解.$n(x)$ 是种群 x 中含有全局最优解个体的个数.在一些文献中 ρ 被称为选择压.

定理 5.2.2 比例选择算子具有下面性质:

(1) 对任意种群 $x\in I^m$,$P\{S(x)\subset x\}=1$.

(2) 对任意一致种群 $x=(i,i,\cdots i)\in U$,$P\{S(x)=x\}=1$.

(3) $P(S(x)\subset B^*)\geqslant[1-(m-1)\rho]^{m'}$.

证明 (1)和(2)是显然的.只证明(3),因为

$$P(S(x)\subset B^*)=\left[\frac{n(x)f^*}{\sum\limits_{i\in x}f(i)}\right]^{m'}=\left[\frac{n(x)f^*}{n(x)f^*+\sum\limits_{i\notin x\cap B^*}f(i)}\right]^{m'}$$

$$=\left[\frac{n(x)}{n(x)+\sum\limits_{i\notin x\cap B^*}f(i)/f^*}\right]^{m'}$$

$$\geqslant \left[1 - \frac{m - n(x)\rho}{n(x) + (m - n(x))\rho}\right]^{m'}$$

$$\geqslant [1 - (m - 1)\rho]^{m'}.$$

定义 5.2.3（杂交算子）　杂交算子是母体空间到个体空间的一个随机映射 $C: I^2 \to I$.

(1)单点杂交算子：等概率地随机确定一个基因位置做为杂交点，再把一对母体两个个体从杂交点分成前后两部分，以概率 p_c 交换两个个体的后半部分得到两个新个体，取第一个个体为杂交结果．称 p_c 为杂交概率．

(2)如果等概率地随机确定两个基因位置做为杂交点，将一对母体的两个个体分成三部分，交换中间部分，这样的杂交算子称为两点杂交算子．类似地可以定义多点杂交算子．

(3)均匀杂交算子：独立地以概率 p_c 把母体的第一个个体的相应分量交换为第二个母体的相应分量，从而得到杂交结果．

定理 5.2.4　(1)设 C 为单点杂交算子，p_c 为杂交概率，$\forall (i,j) \in I^2, k \in I$，则有

$$P\{C(i,j) = k\} = \begin{cases} ap_c/l, & k \neq i, \\ (1 - p_c) + ap_c/l, & k = i. \end{cases} \tag{5.2.1}$$

其中 $a = a(i,j,k)$ 为用单点杂交 (i,j) 可以生成 k 的基因位置的个数．

(2)设 C 为均匀杂交算子，p_c 为杂交概率，$\forall (i,j) \in I^2, k \in I, i = (i_1, i_2, \cdots, i_l), j = (j_1, j_2, \cdots, j_l)$，则有

$$P\{C(i,j) = k\} = \prod_{s=1}^{l}[(1 - p_c)(k_s \oplus i_s) + p_c(k_s \oplus j_s)]. \tag{5.2.2}$$

其中 $\oplus$ 为异或算子，即对于任意 $a, b \in \{0,1\}$ 有

$$a \oplus b = \begin{cases} 1, & 若\ a = b, \\ 0, & 若\ a \neq b. \end{cases}$$

证明　(1)分两种情形考虑：在 $k \neq i$ 时，取决于杂交 (i,j) 可以生成 k 的基因位置的个数 a，因为杂交的概率为 p_c，故 $P\{C(i,j) = k\} = ap_c/l$；当 $k = i$ 时，若 i 与 j 不杂交，即为 $k = i$，这时概率为 $(1 - p_c)$，若 i 与 j 在任何杂交点以概率 p_c 杂交，这时概率为 ap_c/l．故(5.2.1)成立．

(2)设 C 为均匀杂交算子，考虑 k 的第 s 个分量，若 i_s 与 j_s 相同，这时不杂交；而当 i_s 与 j_s 不相同时，则杂交．于是利用全概率公式得(5.2.2)．

推论 5.2.5　设 C 为杂交算子(单点杂交，均匀随机杂交)，对任何母体 (i,j)，必有 $P\{C(i,i) = i\} = 1$.

定理 5.2.6　设 C 为单点杂交或均匀杂交算子，$S: I^m \to R(I^2)$ 是母体选择算子，则对任意种群 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_m)$，有

$$P\{C(S(x)) = x_s\} > 0, \quad \forall s = 1,\cdots,m.$$

证明 因为

$$\begin{aligned} P\{C(S(x)) = x_s\} &\geqslant P\{C(x_s,x_s) = x_s\}P\{S(x) = (x_s,x_s)\} \\ &= P\{S(x) = (x_s,x_s)\} \\ &= \left[f(x_s)\Big/\sum_{k=1}^{m} f(x_k)\right]^2 > 0. \end{aligned}$$

推论 5.2.7 设 $S:I^m \to R(I^2)$是母体选择算子,C 为杂交算子,$x=(i,\cdots,i)$为一致种群,则有

$$P\{C(S(x)) = x\} = 1.$$

定义 5.2.8(变异算子) 变异算子是个体空间到个体空间的随机映射 M:其作用方式为独立地以概率 p_m 改变个体每个分量取值. p_m 称作变异概率.

定理 5.2.9 对于任意两个个体 $i,j\in I$ 有

$$P\{M(i) = j\} = p_m^{d(i,j)}(1-p_m)^{1-d(i,j)}, \tag{5.2.3}$$

其中 $d(i,j)$表示 i 和 j 的 Hammin 距离. 即

$$d(i,j) = \sum_{s=1}^{l} |i_s - j_s|.$$

证明 因为 $i_s \neq j_s$ 的个数为$d(i,j)$,每个 i_s 变异为j_s 的概率为 p_m,而 $i_s = j_s$ 的个数是$l-d(i,j)$个,不变的概率为 $1-p_m$,由于每个基因变异是独立的,故(5.2.3)成立.

注 5.2.10 基于生物学上的考虑,一般认为杂交是自然演化的主要机制,变异为自然演化的背景,它们分别承担遗传与变异两种功能. 因此在具体的应用过程中,杂交概率一般取值较大,在 0.65 与 0.9 之间. 而变异概率取值较小,一般在 0.001 与 0.01 之间.

定理 5.2.11 设 $S:I^m \to R(I^2)$是母体选择算子,C 为杂交算子,M 为变异算子,对任意种群 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_m)\in I^m$ 和个体$j\in I$,使

$$P\{MCS(x) = j\} > 0$$

成立的充分必要条件是 $0<p_m<1$.

证明 充分性若 $0<p_m<1$,则有

$$P\{MCS(x) = i\} = \sum_{j\in I} P\{M(j) = i\}P\{CS(x) = j\} > 0.$$

必要性 假设 $p_m=0$,取 $x=(i,\cdots,i)$是一致种群,$j\in I, j\neq i$. 由于

$$P\{CS(x) = i\} = 1,$$
$$P\{M(i) = j\} = 0,$$

所以

$$P\{PCS(x)=j\}=P\{M(i)=j\}P\{CS(x)=i\}=0.$$

与 $P\{MCS(x)=j\}>0$ 矛盾.

§5.3　遗传机制的过程分析

在遗传算法中,有选择,杂交和变异机制,对于这些机制的性能分析是遗传算法分析的基础,而这种性能分析必须在遗传过程中进行,为了理论分析的需要,我们考虑无限种群的情形.

定义 5.3.1　取值于个体空间 I 的任一随机元 ξ 称为一个无限种群,记

$$a_i=P\{\xi=i\},\quad i\in I;$$

$$A=(a_i:i\in I).$$

我们也称 ξ 的概率分布向量 A 为一个无限种群.

种群是无限种群的特殊情况.

对于给定的适应值函数 $f(i),i\in I$,令

$$F_{ij}=\delta_{ij}f(i),\quad i,j\in I,$$

其中 δ_{ij} 为 δ 函数,即

$$\delta_{ij}=\begin{cases}1, & 当\ i=j,\\ 0, & 当\ i\neq j.\end{cases}$$

用 F 表示 $2^l\times 2^l$ 阶矩阵 $(F_{ij})_{i,j\in I}$, $\mathbf{1}$ 表示 2^l 个分量全为 1 的向量,记向量

$$F(A):=\frac{F\cdot A}{\mathbf{1}^T(F\cdot A)},\tag{5.3.1}$$

即对任意 $i\in I$ 有

$$F(A)_i=\frac{f(i)a_i}{\sum\limits_{j\in I}f(j)a_j},\tag{5.3.2}$$

称 $F(A)$ 是无限种群 A 通过适应值比例选择而得到的新的无限种群.归纳地可以定义

$$F^{(2)}(A)=F(F(A)),$$

$$F^{(n)}(A)=F(F^{(n-1)}(A)),\qquad n=1,2,\cdots$$

利用归纳法不难验证

$$F^{(n)}(A)_i=\frac{f^n(i)a_i}{\sum\limits_{j\in I}f^n(j)a_j},\qquad i\in I.\tag{5.3.3}$$

设 ξ 是 I 上的初始无限种群,用 ξ_n 表示经过 n 步适应值选择得到的随机个体,即它的概率分布是 $F^{(n)}(A),n=1,2,\cdots$,记 $\xi_0:=\xi$,我们有

$$P\{\xi_n=i\}=F^{(n)}(A)_i.$$

定理 5.3.2 设 ξ 是 I 上的初始无限种群具有分布 $A=(a_i:i\in I)$ 记

$$I_0=\{i:a_i>0\},$$
$$I_1=\{i\in I_0:f(i)=\max_{j\in I_0}f(j)\}$$

则有

$$\bar{a}_i=\lim_{n\to\infty}P\{\xi_n=i\}=\begin{cases}a_i\Big/\sum\limits_{j\in I_1}a_j, & i\in I_1,\\ 0, & i\notin I_1.\end{cases}\tag{5.3.4}$$

而且存在 $C>0$ 使

$$\sum_{i\in I}|P\{\xi_n=i\}-\bar{a}_i|\leqslant c\lambda^{-n}.\tag{5.3.5}$$

其中

$$\lambda=\min\left\{\frac{f_{\max}}{f(i)}:a_i>0,i\notin I_1\right\},$$
$$f_{\max}=f(i_0)\qquad(i_0\in I_1).$$

ξ 是 I 上的初始无限种群.

证明 由定理 5.3.1 得

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}P\{\xi_n=i\}&=\lim_{n\to\infty}\frac{(f(i))^n a_i}{\sum\limits_{j\in I}(f(j))^n a_j}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{a_i}{\sum\limits_{j\in I}(f(j)/f(i))^n a_j}\\&=\frac{a_i}{\sum\limits_{j\in I}\lim\limits_{n\to\infty}(f(j)/f(i))^n a_j}.\end{aligned}$$

由于 $i\in I_1$ 时, $\lim\limits_{n\to\infty}(f(j)/f(i))^n=0$ 当且仅当 $j\notin I_1$, 若 $i\notin I_1$ 时, $\lim\limits_{n\to\infty}(f(j)/f(i))^n=\infty$, 当且仅当 $f(j)>f(i)$, 从而(5.3.4)得证.

下面证明(5.3.5), 由于

$$\begin{aligned}&\sum_{i\in I}|P\{\xi_n=i\}-\bar{a}_i|\\&=\sum_{i\in I_1}\left|\frac{f_{\max}^n a_i}{\sum\limits_{j\in I}(f(j))^n a_j}-\frac{a_i}{\sum\limits_{j\in I_1}a_j}\right|+\sum_{j\notin i}\frac{(f(i))^n a_i}{\sum\limits_{i\in I_1}(f(j))^n a_j}\\&=\sum_{i\in I_1}\left|\frac{a_i}{\sum\limits_{j\in I_1}a_j+\sum\limits_{j\in I}(f(j)/f_{\max})^n a_j}-\frac{a_i}{\sum\limits_{j\in I_1}a_j}\right|\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\sum_{i\notin I_1}\frac{a_i}{\sum_{j\in I_1}(f_{\max}/f(i))^n a_j+\sum_{j\notin I_1}(f(j)/f(i))^n a_j}\\
&\leqslant\sum_{i\notin I_1}\frac{\sum_{j\notin I_1}(f(j)/f_{\max})^n a_j}{\sum_{j\in I_1}a_j+\sum_{j\notin I_1}(f(j)/f_{\max})^n a_j}\frac{a_i}{\sum_{j\in I_1}a_j}\\
&\leqslant\sum_{i\notin I_1}\frac{\sum_{j\notin I_1}(f(j)/f_{\max})^n a_j}{\sum_{j\in I_1}a_j+\sum_{j\notin I_1}(f(j)/f_{\max})^n a_j}\frac{a_i}{\sum_{j\in I_1}a_j}\\
&\leqslant\sum_{i\notin I_1}\frac{\sum_{j\notin I_1}(f(j)/f_{\max})^n a_j}{\sum_{j\in I_1}a_j+\sum_{j\notin I_1}(f(j)/f_{\max})^n a_j}\frac{a_i}{\sum_{j\in I_1}a_j}+\sum_{i\in I_1}\frac{a_i}{\lambda^n\sum_{j\in I_1}a_j}\\
&\leqslant\sum_{i\notin I_1}\frac{\sum_{j\notin I_1}\lambda^{-n}a_j}{\sum_{j\in I_1}a_j}\frac{a_i}{\sum_{j\in I_1}a_j}+\sum_{i\notin I_1}\frac{a_i}{\lambda^n\sum_{j\in I_1}a_j}\\
&\leqslant\lambda^{-n}2\frac{\sum_{j\notin I_1}a_j}{\lambda^n\sum_{j\in I_1}a_j}.
\end{aligned}
\tag{5.3.6}
$$

定理 5.3.3　设 I 上的初始无限种群 ξ 有分布

$$
a_i=\begin{cases}1/N, & i\in I_0,\\ 0, & i\notin I_0,\end{cases}\qquad |I_0|=N,
$$

则

$$
\sum_{i\in I}|P\{\xi_n=i\}-\bar{a}_i|=2-2|I_1|f_{\max}^n\Big/\sum_{j\in I_0}(f(j))^n, \tag{5.3.7}
$$

其中

$$
\bar{a}_i=\lim_{n\to\infty}P\{\xi_n=i\}=\begin{cases}\dfrac{1}{|I_1|}, & i\in I_1,\\ 0, & i\notin I_1,\end{cases}
$$

$$
I_1=\{i:f(i)=\max_{j\in I}f(j)\}.
$$

证明　因为

$$
\frac{f_{\max}^n}{\sum_{j\in I_0}(f(j))^n}=\frac{f_{\max}^n}{|I_1|f_{\max}^n+\sum_{j\notin I_1}(f(j))^n}\leqslant 1/|I_1|, \tag{5.3.8}
$$

于是

$$\begin{aligned}\sum_{i\in I}|P\{\xi_n=i\}-\bar{a}_i| &= \sum_{i\notin I_1}P\{\xi_n=i\}+\sum_{j\in I_1}\left|\frac{f_{\max}^n}{\sum_{j\in I_0}(f(j))^n}-\frac{1}{|I_1|}\right| \\ &= \sum_{i\notin I_1}P\{\xi_n=i\}-|I_1|\sum_{j\in I_1}\left(\frac{f_{\max}^n}{\sum_{j\in I_0}(f(j))^n}-\frac{1}{|I_1|}\right) \\ &= 1+\sum_{i\notin I_1}P\{\xi_n=i\}-\sum_{i\in I_1}P\{\xi_n=i\} \\ &= 2-2|I_1|f_{\max}^n\Big/\sum_{j\in I_0}(f(j))^n.\end{aligned}$$

推论 5.3.4 在定理 5.3.3 的假设下,有

$$\sum_{i\in I_1}|P\{\xi_n=i\}-\bar{a}_i|\leqslant 2\left(\frac{N}{|I_1|}-1\right)\lambda^{-n},$$

其中

$$\lambda=\min(f_{\max}/f(i):i\in I_0).$$

证明 由定理 5.3.3 得

$$\begin{aligned}\sum_{i\in I}|P\{\xi_n=i\}-\bar{a}_i| &= 2-2|I_1|f_{\max}^n\Big/\sum_{j\in I_0}(f(j))^n \\ &= 2-2|I_1|\Big/\sum_{j\in I_0}(f(j)/f_{\max})^n \\ &= 2-2|I_1|\Big/\Big(|I_1|+\sum_{j\in I_0}(f(j)/f_{\max})^n\Big) \\ &= 2-2|I_1|/(|I_1|+(|I_0|-|I_1|)\lambda^{-n}).\end{aligned}$$

推论 5.3.4 说明了收敛速度与 N 有关,N 越小收敛速度越快. 但是当 $i\in I_1$ 时有

$$\bar{a}_i=\lim_{n\to\infty}P\{\xi_n=i\}=0.$$

于是 f 的最大值若落在 I_0 之外,通过适应值选择算法,不能得到全局最优值.

变异是一个重要的遗传机制,如果没有变异,遗传过程经常收敛到局部极值. 在没有变异的情况之下,遗传过程要达到最大值依赖于初始种群的性能. 下面我们在不考虑选择的情况之下研究变异的规律.

定理 5.3.5 设 ξ 是初始无限种群,M 是变异算子,μ 为变异概率,记

$$\xi_1=M\xi,\quad \xi_2=M(M\xi)=M\xi_1,\quad\cdots,\quad \xi_n=M\xi_{n-1},$$

则 $\forall\, n\geqslant 1$ 有

$$P\{\xi_n=i\}=\sum_{j\in I}a_j\prod_{s=1}^{l}[0.5+(\delta_{i_sj_s}-0.5)(1-2\mu)^n],\quad (5.3.9)$$

证明 由于个体各分量的变异是独立的,故

$$P\{M(j)=i\}=\prod_{s=1}^{l}[\mu+\delta_{i_sj_s}(1-2\mu)]$$
$$=\prod_{s=1}^{l}[0.5+(\delta_{i_sj_s}-0.5)(1-2\mu)]. \quad (5.3.10)$$

现在我们归纳地证明(5.3.9)成立. 当 $n=1$ 时,由(5.3.10)得

$$P\{\xi_1=i\}=P\{M\xi=i\}$$
$$=\sum_{j\in I}P\{\xi=j\}P\{M(j)=i\}$$
$$=\sum_{j\in I}a_j\prod_{s=1}^{l}[0.5+(\delta_{i_sj_s}-0.5)(1-2\mu)].$$

于是对于 $n=1$(5.3.9)成立,若对于 n(5.3.9)成立,则

$$P\{\xi_{n+1}=i\}=\sum_{j\in I}P\{\xi_n=j\}P\{M(j)=i\}$$
$$=\sum_{j\in I}\sum_{k\in I}a_k\prod_{s=1}^{l}[0.5+(\delta_{j_sk_s}-0.5)(1-2\mu)^n]\prod_{t=1}^{l}[0.5+(\delta_{i_tj_t}-0.5)(1-2\mu)].$$
$$=\sum_{k\in I}a_k\sum_{j\in I}\prod_{s=1}^{l}[0.5+(\delta_{j_sk_s}-0.5)(1-2\mu)^n][0.5+(\delta_{j_sk_s}-0.5)(1-2\mu)]$$
$$=\sum_{k\in I}a_k\prod_{s=1}^{l}\sum_{j_s}[0.5+(\delta_{j_sk_s}-0.5)(1-2\mu)^n][0.5+(\delta_{j_sk_s}-0.5)(1-2\mu)].$$

记 $\sum_s=\sum_{j_s}[0.5+(\delta_{j_sk_s}-0.5)(1-2\mu)^n][0.5+(\delta_{j_sk_s}-0.5)(1-2\mu)]$,

对于固定的 i_s 和 k_s 分两种情形讨论

(1)当 $i_s=k_s$ 时

$$\sum_s=\Big(\sum_{j_s=i_s}+\sum_{j_s\neq i_s}\Big)[0.5+(\delta_{j_sk_s}-0.5)(1-2\mu)^n][0.5+(\delta_{j_sk_s}-0.5)(1-2\mu)]$$
$$=[0.5+\frac{1}{2}(1-2\mu)^n][0.5+\frac{1}{2}(1-2\mu)]$$
$$+[0.5-\frac{1}{2}(1-2\mu)^n][0.5-\frac{1}{2}(1-2\mu)]$$
$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(1-2\mu)^{n+1}$$

$$= [0.5 + (\delta_{i_s k_s} - 0.5)(1 - 2\mu)^{n+1}].$$

(2)当 $i \neq k_s$ 时

$$\sum\nolimits_s = \Big(\sum_{j_s = i_s} + \sum_{j_s = k_s}\Big)[0.5 + (\delta_{j_s k_s} - 0.5)(1 - 2\mu)^n][0.5$$

$$+ (\delta_{j_s k_s} - 0.5)(1 - 2\mu)]$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(1 - 2\mu)^{n+1}$$

$$= [0.5 + (\delta_{i_s k_s} - 0.5)(1 - 2\mu)^{n+1}],$$

所以对于 $n+1$,(5.3.9)成立.

推论 5.3.6 设 ξ 是初始无限种群,变异概率 $\mu < 0.5$,则

$$\lim_{n \to \infty} P\{\xi_n = i\} = \frac{1}{|I|}.$$

而且收敛是单调的,即

$$\sum_{i \in I} \left| P\{\xi_{n+1} = i\} - \frac{1}{|I|} \right| \leqslant \sum_{i \in I} \left| P\{\xi_n = i\} - \frac{1}{|I|} \right|. \quad (5.3.11)$$

证明 由定理 5.3.5 及 $(1 - 2\mu) < 1$,得

$$\lim_{n \to \infty} P\{\xi_n = i\} = \sum_{j \in I} a_j \prod_{s=1}^{l} 0.5 = \left(\frac{1}{2}\right)^l = \frac{1}{|I|},$$

$$\sum_{i \in I} \left| P\{\xi_{n+1} = i\} - \frac{1}{|I|} \right|$$

$$= \sum_{i \in I} \left| \sum_{j \in I} P\{\xi_n = j\} \prod_{s=1}^{l} [\mu + \delta_{j_s k_s}(1 - 2\mu)] - \frac{1}{|I|} \right|$$

$$= \sum_{i \in I} \left| \sum_{j \in I} \left(P\{\xi_n = j\} - \frac{1}{|I|}\right) \prod_{s=1}^{l} [\mu + \delta_{j_s k_s}(1 - 2\mu)] \right|$$

$$\leqslant \sum_{j \in I} \left| P\{\xi_n = j\} - \frac{1}{|I|} \right| \sum_{i \in I} \prod_{s=1}^{l} [\mu + \delta_{j_s k_s}(1 - 2\mu)]$$

$$\leqslant \sum_{j \in I} \left| P\{\xi_n = j\} - \frac{1}{|I|} \right|.$$

(5.3.11)得证.

定理 5.3.5 及其推论说明不管初始无限种群具有什么分布,其极限分布都是均匀分布.也就是说,变异算子不断重复进行,可以达到个体空间中任何个体.

下面考虑杂交算子 C,取 I 上的随机元 $\hat{u}$,对于给定的母体(j,k)则随机个体 $C(j,k)$的分布为

$$P\{C(j,k) = i\} = P\{(j \otimes \hat{u}) \oplus (k \otimes (1 \oplus \hat{u})) = i\}, \quad i \in I.$$

例 5.3.7 单点杂交 $\hat{u}$ 是下面集合上的均匀分布：

$$I_0 = \{(00\cdots01),(00\cdots11),\cdots,(11\cdots1)\},$$

单点杂交是在 j 中取右边部分，在 k 中取左边部分而构成新的后代.

例 5.3.8 两点杂交 $\hat{u}$ 是下面集合上的均匀分布

$$I_2 = \{00\cdots01),(00\cdots10),\cdots,(10\cdots00),\\(00\cdots11),(0\cdots110),\cdots,(11\cdots1)\}.$$

两点杂交 $\hat{u}$ 是在中间部分采用 j，而在其它部分采用 k. 由于 I_2 中有 $l(l+1)/2$ 个元素，故两点杂交 $\hat{u}$ 是 I_2 上分布概率为 $2/l(l+1)$ 均匀分布.

例 5.3.9 均匀随机杂交 $\hat{u}$ 是按照分布

$$P\{\hat{u} = u\} = \mu^{|u|}(1-\mu)^{l-|u|},$$

当 $\mu=0.5$ 时

$$P\{\hat{u} = u\} = 1/2^l.$$

表示均匀杂交.

例 5.3.10 半随机杂交 $\hat{u}$ 是 I_3 上的均匀分布.

$$I_3 = \begin{cases} \left\{u \in I, |u| = \dfrac{1}{2}\right\}, & l \text{ 为偶数}, \\ \left\{u \in I, |u| = \dfrac{l-1}{2} \vee |u| = \dfrac{l+1}{2}\right\}, & l \text{ 为奇数}. \end{cases}$$

这类杂交取每个双亲的一半基因杂交后产生后代.

§5.4 遗传算法的马氏链模型

考虑优化问题(P)：$\max\{f(i):i\in I\}$.

问题(P)的全局最优解集

$$B^* \equiv \{i \in I:\ f(i) = f^* \equiv \max(f(j):j \in I)\}.$$

给定概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$，E 表示期望算子，文中许多关系式是 $a.s.$ 成立，为简单计，我们略去 $a.s.$. 对于种群 x，$n(x)\equiv|x\cap B^*|$表示种群 x 中包含的最优解个数(相同个体重复计算). 下面给出抽象的选择算子，变异算子和杂交算子及它们的特征数的定义.

标准遗传算法的马尔可夫链模型：标准遗传算法的过程为

(1) 对 $t=0$ 任意给出初始随机种群 $X(0)$.

(2) 用母体选择算子 S 在$X(t)$中按以下分布独立地选择 m 个母体：

$$P\{S(X(t)) = (i,j)\} = \begin{cases} f(i)f(j)\Big/\big(\sum\limits_{k\in I} f(k)\big)^2, & (i,j) \subset X(n), \\ 0, & \text{否则}. \end{cases}$$

(3)用单点杂交算子 C 对(2)中选出的 m 个母体进行杂交，即

$$P\{C(i,j) = k\} = \begin{cases} kp_c/l, & k \neq i \text{ 且 } k = Ai + (I - A)j, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

其中 $0 < p_c < 1$ 是杂交概率, A 是一个对角矩阵, 它的前 r 个元素为 1, 而其他的元素为零, r 称为单点杂交的杂交点.

(4)用单点变异算子 M, 设变异概率为 p_m, 将(3)中经杂交算子获得的每个个体, 按下面概率分布变成新的个体,

$$P\{M(i) = j\} = p_m^{d(i,j)}(1 - p_m)^{l-d(i,j)},$$

其中 $d(i,j)$是 i 与 j 之间的 Hammin 距离.

(5)若停止准则满足, 则停止. 否则置 $t = t + 1$, 并转到(2).

记 $G = MCS$, 则标准遗传算法过程可表为

$$X(t) = G(X(t-1)) = MCS(X(t-1)), \quad t = 1,2,\cdots$$

易知由上述标准遗传算法过程所得到的种群列 $\{X(t), t = 0,1,\cdots\}$ 是一个齐次马氏链. 并且它是不可约非周期的. 根据遍历性定理, $\{X(t), t = 0,1,\cdots\}$ 存在极限概率分布. 并且所有种群是正常返. 这表明标准遗传算法不能保证得到全局最优解.

下面我们进一步研究标准遗传算法在种群转移过程中遗传因子的变化规律. 记

$$P_{ij}(x,a) = P\{X_{ij}(t+1) = a \mid X(t) = x\}, \quad a = 0,1,$$

其中

$$x = (x_1, x_2, \cdots, x_m) \in I^m,$$

$$x_i = (x_{i1}, x_{i2}, \cdots, x_{il}) \in I, \quad i = 1, \cdots, m.$$

称 $P_{ij}(x,a)$为给定 x 时, 后代个体的一维边际分布, 令

$$I_{1j} = \{j : x_{ij} = 1, 1 \leqslant i \leqslant m\},$$

$$I_{0j} = \{i : x_{ij} = 0, 1 \leqslant i \leqslant m\},$$

$$f_{1j}(x) = \sum_{i \in I_{1j}} f(x_i) = \sum_{x_{ij}=1} f(x_i),$$

$$f_{0j}(x) = \sum_{i \in I_{0j}} f(x_i) = \sum_{x_{ij}=0} f(x_i),$$

$$\bar{f}(x) = \sum_{i=1}^{m} f(x_i) = f_{0j}(x) + f_{1j}(x).$$

定理 5.4.1 设 $\{X(t), t = 0,1,\cdots\}$ 为采用单点杂交算子的标准遗传算法的种群序列. 给定 $X(t) = x$, 则下代个体 $X_i(t+1)$的第 j 个分量 $X_{ij}(t+1)$ 服从参数为 $P_j(x,1)$的 0-1 分布, 其中

$$P_j(x,1) = P\{X_{ij}(t+1) = 1 \mid X(t) = x\},$$

$$= \frac{f_{1j}(x)}{f(x)} + \left[1 - \frac{f_{1j}(x)}{f(x)}\right] p_m .$$

证明　令

$$Y = (Y_1, \cdots, Y_l) = C(S(x)),$$

则

$$\begin{aligned}
&P\{X_{ij}(t+1) = 1 \mid X(t) = x\} = P\{M(Y_j) = 1 \mid X(t) = x\} \\
&= P\{Y_j = 1 \mid X(t) = x\} P\{M(1) = 1\} \\
&\quad + P\{Y_j = 0 \mid X(t) = x\} P\{M(0) = 0\} \\
&= P\{Y_j = 1 \mid X(t) = x\}(1 - p_m) \\
&\quad + P\{Y_j = 0 \mid X(t) = x\} p_m , \\
&\quad P\{Y_j = 1 \mid X(t) = x\} \\
&= P\{Y = C(S(x)); Y_j = 1\} \\
&= \sum_{1 \leqslant u \leqslant m} \sum_{1 \leqslant v \leqslant m} P\{C(x_u, x_v) = Y, Y_j = 1\} P\{S(x) = (x_u, x_v)\}.
\end{aligned}$$

记

$$\begin{aligned}
A_1 &= I_{1j} \times I_{1j}, \\
A_2 &= I_{1j} \times I_{0j}, \\
A_3 &= I_{0j} \times I_{1j}, \\
A_4 &= I_{0j} \times I_{0j},
\end{aligned}$$

于是 $m \times m = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$. 记

$$B_i = \sum_{(u,v) \in A_i} P\{C(x_u, x_v) = Y, Y_j = 1\} P\{S(x) = (x_u, x_v)\},$$

$$i = 1, 2, 3, 4,$$

于是

$$P\{Y_j = 1 \mid X(t) = x\} = B_1 + B_2 + B_3 + B_4 .$$

当 $(u,v) \in A_4$ 时, $C(x_u, x_v) = Y$ 中 $Y_j = 0$, 故 $B_4 = 0$.

当 $(u,v) \in A_1$ 时, $C(x_u, x_v) = Y$ 中 $Y_j = 1$, 故

$$\begin{aligned}
B_1 &= \sum_{(u,v) \in A_i} P\{S(x) = (x_u, x_v)\} \\
&= \sum_{(u,v) \in A_1} \frac{f(x_u) f(x_v)}{(\bar{f}(x))^2}.
\end{aligned}$$

当 $(u,v) \in A_3$ 时, 由于 $u \in I_{0j}, v \in I_{1j}$, 即 $x_{uj} = 0, x_{vj} = 1$, 杂交必须在 j 分量之前进行才能使 $Y_j = 1$, 于是

$$B_3 = \sum_{(u,v) \in A_3} \frac{j p_c f(x_u) f(x_v)}{(\bar{f}(x))^2}.$$

当$(u,v)\in A_2$时,由于$u\in I_{1j}, v\in I_{0j}$,即$x_{uj}=1, x_{vj}=0$,于是要使$Y_j=1$,必须满足下列两种情形之一:

(a) 杂交在j分量之后进行,这时不管是否杂交均有$Y_j=1$,于是

$$P\{C(x_u,x_v)=Y, Y_j=1\}=\frac{l-j}{l}.$$

(b)杂交在j分量之前进行,但并未杂交,于是

$$P\{C(x_u,x_v)=Y, Y_j=1\}=\frac{j}{l}(1-p_c),$$

从而

$$B_2=\sum_{(u,v)\in A_2}\left(\frac{l-j}{l}+\frac{j}{l}(1-p_c)P\{S(x)=(x_u,x_v)\}\right)$$
$$=\sum_{(u,v)\in A_2}\left(1-\frac{jp_c}{l}\right)\frac{f(x_u)f(x_v)}{(\bar{f}(x))^2}.$$

综合上述结果得

$$P\{Y_j=1\mid X(t)=x\}=B_1+B_2+B_3$$
$$=\frac{\left(\sum_{u\in I_{1j}}f(x_u)\right)^2}{(\bar{f}(x))^2}+\sum_{(u,v)\in A_1}\frac{f(x_u)f(x_v)}{(\bar{f}(x))^2}$$
$$=\frac{(f_1(x))^2}{(\bar{f}(x))^2}+\frac{f_{1j}(x)}{\bar{f}(x)}\left(1-\frac{f_{1j}(x)}{\bar{f}(x)}\right)$$
$$=\frac{f_{1j}(x)}{\bar{f}(x)}.$$

推论 5.4.2 设$\{X(t), t=0,1,\cdots\}$为采用均匀杂交算子的标准遗传算法的种群马氏链,则

$$P_j(x,1)=P\{X_{ij}(t+1)=1\mid X(t)=x\}$$
$$=\frac{f_{1j}(x)}{\bar{f}(x)}+\left(1-2\frac{f_{1j}(x)}{\bar{f}(x)}\right)p_m.$$

证明 用定理5.3.5的记号,我们有

$$P\{Y_j=1\mid X(t)=x\}$$
$$=\sum_{(u,v)\in A_1}\frac{f(x_u)f(x_v)}{(\bar{f}(x))^2}+\sum_{(u,v)\in A_2}\frac{f(x_u)f(x_v)}{(\bar{f}(x))^2}(1-p_c)$$
$$+\sum_{(u,v)\in A_3}\frac{f(x_u)f(x_v)}{(\bar{f}(x))^2}p_c$$
$$=\frac{f_{1j}(x)}{\bar{f}(x)}.$$

第六章　抽象遗传算法及其收敛性的一般理论

关于遗传算法收敛性已有许多工作,包括使用模拟退火,马尔可夫链和Vose-Liepins等模型.马尔可夫链方法也许是研究遗传算法的概率行为最普遍,最自然的方法,但大多数已有的马尔可夫链分析结果都是基于遍历性理论而得到.比如,Rudolph[14]证明了当变异概率不是零时,经典的时齐遗传算法不收敛到全局最优解,而杰出者选择遗传算法收敛到全局最优解 Suzuki[15,16]推广了这些结果,对修改的杰出者选择遗传算法 Suzuki[16]证明了当变异和杂交概率趋于零且选择压趋于无穷时,遗传算法马尔可夫链的平稳分布集中在一致全局最优解种群上.最近 Rudolph[17]综述了关于演化算法的极限和有限时间行为的结果,并证明了父代种群参与竞争的时齐遗传算法以概率 1 完全收敛到全局最优.不带杰出者选择策略的时齐经典遗传算法不收敛到全局最优的事实推动了非时齐演化算法的发展见(Suzuki 的[15,16],Rudolph 的[18],Davis 的[19,20],Mahfoud and Gol 的[21],Cerf 的[22,23],Lozano et al 的[24] 和 He and Kang 的[25]).

本章考虑抽象的非时齐遗传算法.§6.1 给出抽象的选择,变异和杂交算子的定义,并定义了能反映它们的优化能力的特征数.§6.2 在这些特征数满足适当的条件下,证明了算法的随机种群列以概率 1 完全收敛到全局最优解集等一些结果.把这些一般性结果应用于具体的遗传算法(比如经典遗传算法),不利用非时齐马尔可夫链的遍历性理论,简单地证明了上述收敛结果;当变异概率趋于零时,还证明了相应算法的随机种群列依概率收敛到一致全局最优解集.这些收敛结果都依赖于种群规模和杂交算子.最后对父代种群参与竞争和带杰出者选择策略的遗传算法,证明了相应的收敛结果不依赖种群规模和杂交算子.

§6.1　演化算子及其特征数

考虑优化问题(P):$\max\{f(i):i\in I\}$,集 I 称为个体空间,f 为 I 上正实值函数,称为适应函数.种群空间为

$$I^m=\{x:x=(x_1,\cdots,x_m),x_k\in I,\quad 1\leqslant k\leqslant m\},$$

正整数 m 称为种群规模,问题(P)的全局最优解集

$$B^* \equiv \{i \in I: f(i) = f^* \equiv \max(f(j): j \in I)\}.$$

给定概率空间$(\Omega, \mathscr{F}, P)$，小写字母x, y, a, b等表示确定性种群，大写字母X, Y等表示随机种群，$R(I^m)$是取值于I^m的随机种群全体. 对于种群x，$n(x) \equiv |x \cap B^*|$表示种群x中包含的最优解个数(相同个体重复计算). 下面给出抽象的选择，变异和杂交算子及它们的特征数的定义.

6.1.1 选择算子

选择算子是一个随机映射$S: I^m \to R(I^m)$满足

(1) $\forall x \in I^m, n(x) \geqslant 1, P\{n(S(x)) \geqslant 1\} > 0.$

(2) $\forall x \in U, P\{S(x) \in U\} = 1.$

其中$U \subset I^m$是一致种群$u(i) \equiv (i, i, \cdots, i), i \in I$全体，假设(1)表明选择算子从含有最优个体的种群中以正概率获得含有最优个体的种群. 令

$$m(x) = \max\{k: P(n(S(x)) = k) > 0, 0 \leqslant k \leqslant m\}, \quad \forall x \in I^m,$$

$$m_0 = \min\{m(x): \forall x \in I^m, n(x) \geqslant 1\},$$

$$\alpha = \min\{P(n(S(x)) = m(x)): \forall x \in I^m\}.$$

$m(x)$是选择算子从种群x可能选到的最优个体数最大值，m_0是选择算子有能力选到的最优个体数最大值的最大下界，α是获得最多最优个体的可能性的最大下界，可把它称为选择算子的择优率；m_0和α都称为选择算子的特征数，下面计算一些具体选择算子的特征数.

例 6.1.1 比例选择：$\forall x \in I^m, S(x) = (Y_1, \cdots, Y_m)$由$m$次独立重复实验产生，随机个体$Y_k$的概率分布为

$$P\{Y_k = i\} = x(i)f(i) / \sum_{j \in x} f(j), \quad i \in x, 1 \leqslant k \leqslant m.$$

这里$x(i)$是种群x中含个体i的个数. 令

$$\rho \equiv \max\{f(i)/f(j): f(i) < f(j), i, j \in I\} < 1.$$

在一些文献中ρ被称为选择压. 易知当$n(x) \geqslant 1$时，$m(x) = m \Rightarrow m_0 = m$，且有

$$P(n(S(x)) = m(x)) = \left[\frac{n(x) f^*}{\sum_{i \in x} f(i)}\right]^m$$

$$= \left[\frac{n(x)}{n(x) + \sum_{i \notin x \cap B^*} f(i)/f^*}\right]^m$$

$$\geqslant [1 - (m-1)\rho]^m,$$

从而

$$\Rightarrow \alpha \geqslant [1 - (m-1)\rho]^m.$$

将上面结果应用于带严格单调上升尺度函数 $\sigma: R \to R^+$ 的比例选择,得到相应特征数为

$$\alpha_\sigma \geqslant [1-(m-1)\rho_\sigma]^m,$$

其中

$$\rho_\sigma = \max\{\sigma(f(i))/\sigma(f(j)): f(i) < f(j), i, j \in I\} < 1.$$

(a) 若取 $\sigma_t(u) = u^t, u \in R^+$,则有

$$\alpha(t) \geqslant [1-(m-1)\rho^t]^m.$$

由于 $\rho<1$,所以

$$\sum_{t=1}^{\infty}[1-\alpha(t)] < \infty.$$

(b)若取 $\sigma_t(u) = \mathrm{e}^{-u/T(t)}$,我们得到所谓模拟退火型遗传算法(SA-Like GA),这时

$$\rho_{\sigma_t} = \mathrm{e}^{-\Delta/T(t)},$$

其中,$T(t)$是退火温度.且

$$\Delta = \min\{f(i)-f(j): f(i) > f(j), \quad i, j \in I\} > 0,$$
$$\alpha(t) \geqslant [1-(m-1)\mathrm{e}^{-\Delta/T(t)}]^m.$$

若取 $T(t) = \Delta'/\ln t, \Delta' > \Delta$,则有

$$\mathrm{e}^{-\Delta/T(t)} = t^{-\Delta'/\Delta},$$

$$\sum_{t=1}^{\infty}[1-\alpha(t)] < \infty.$$

例 6.1.2　Tournament 选择(参见[26]):选择规则是随机个体 $Y_i, 1 \leqslant i \leqslant m$,以概率1选择种群 x 中与 x_i 相邻的 s 个个体中的最佳个体.易知当 $n(x)=1$ 时,$m(x)=s$;当 $n(x)=k, 2\leqslant k \leqslant m$ 时,$m(x) \geqslant \min(m, s+k)$,从而有

$$m_0 = s.$$

因为选择是非随机的,所以

$$\forall x \in I^m, \quad n(S(x)) = m(x) \Rightarrow \alpha = 1.$$

例 6.1.3　线性 Ranking 选择:$\forall x \in I^m, S(x) = (Y_1, \cdots, Y_m)$由 m 次独立实验产生,设 x 中个体依适应值排序为

$$f(x_1) \geqslant \cdots \geqslant f(x_m),$$

则选择规则是使

$$P\{Y_k = x_r\} = p + (m-r)q, \qquad 1 \leqslant k \leqslant m, \quad 1 \leqslant r \leqslant m,$$

这里 p, q 是满足

$$2^{-1}m(m-1)q + mp = 1,$$

的可调参数. 当 $n(x)\geqslant 1$ 时, $m(x)=m$ 从而

$$m_0 = m,$$

$$\alpha \geqslant (p+(m-1)q)^m,$$

若取

$$q(t) = 2m^{-1} + t^{-(1+\varepsilon)}, \qquad \varepsilon > 0$$

或

$$q(t) = 2m^{-1} + \theta^t, \qquad 0<\theta<1,$$

则有

$$\sum_{t=1}^{\infty}(1-\alpha(t)) < \infty.$$

例 6.1.4 非线性 Ranking 选择(参见例 3):选择规则是使

$$P\{Y_k = x_r\} = q(1-q)^{r-1} 1\leqslant k\leqslant m, \qquad 1\leqslant r\leqslant m,$$

易得

$$m_0 = m, \qquad \alpha\geqslant q^m,$$

若取 $q(t)=1-\theta^t$, $0<\theta<1$ 或 $q(t)=1-t^{-(1+\varepsilon)}$, $\varepsilon>0$, 则有

$$\sum_{t=1}^{\infty}(1-\alpha(t)) < \infty.$$

6.1.2 变异算子

变异算子是一个随机映射 $M: I^m\rightarrow R(I^m)$ 满足,

$$\forall x\in I^m, P\{n(M(x))\geqslant 1\} > 0.$$

此假设表明变异算子将任意群种以正概率变为含有最优个体的群种. 对变异算子定义如下一列特征数.

$$\beta_k = \min\{p\{n(G(x))\geqslant 1\}: \forall x\in I^m, n(x)\geqslant k\}, \quad 1\leqslant k\leqslant m.$$

例 6.1.5 经典变异算子 M:这时个体空间 $I=\{0,1\}^L$, $\forall x\in I^m$, 随机种群 $M(x)$的概率分布为

$$P\{M(x) = y\} = \prod_{k=1}^{m}(1-p)^{L-d(x_k,y_k)}p^{d(x_k,y_k)}, \qquad y\in I^m,$$

其中 $d(x_k,y_k)$是个体 x_k 与 y_k 之间的 Hammin 距离, p 是变异概率, 其特征数

$$\beta_0 = \min\{P\{n(M(x))\geqslant 1\}: \forall x\in I^m, n(x)\geqslant 0\} = O(p^L),$$

$$\beta_k = 1-\max\{p\{n(M(x)) = 0\}: \forall x\in I^m, n(x)\geqslant k\}$$

$$= 1-(1-p)^{mL-k}p^k, \qquad 1\leqslant k\leqslant m.$$

6.1.3 杂交算子

杂交算子是一个随机映射 $C: I^m\rightarrow R(I^m)$满足

(1) $\forall x \in I^m, n(x) = m, P\{n(C(x)) = m\} > 0$.

(2) $\forall x \in U, P\{C(x) = x\} = 1$.

假设(1)表明杂交算子作用于最优群种(由最优个体组成的群种)时,以正概率产生最优群种.其特征数定义为

$$\gamma \equiv \min\{P\{n(C(x)) = m\} : n(x) = m\},$$

γ 可以视为杂交算子的保优率.

例 6.1.6　单点杂交(参见[30]):由母体(a,b)杂交产生随机个体 $C(a,b)$,它的概率分布为

$$P\{C(a,b) = e\} = \begin{cases} 1 - q + kq/l, & \text{若 } e = a, \\ kq/l, & \text{若 } e \neq a, \end{cases} \quad e \in I,$$

其中 $k = k(a,b,e)$是杂交(a,b)可生成 e 的基因位置数.独立地重复杂交实验 m 次得到随机种群$C(x)$,因为当 $n(x) = m$ 时,

$$\begin{aligned} P\{n(C(x)) = m\} &\geqslant P\{c(x) \subset x\} \geqslant (1 - q + kq/l)^m \\ &\geqslant (1 - [(l-1)q/l])^m. \end{aligned}$$

所以

$$\gamma \geqslant (1 - [(l-1)q/l])^m.$$

考虑杂交算子列$\{C_t\}$时,取杂交概率 $q_t = t^{-(1+\varepsilon)}, \varepsilon > 0$,则有

$$\sum_{t=1}^{\infty}(1 - \gamma(t)) < \infty.$$

§6.2　遗传算法收敛性的一般理论

本节讨论遗传算法的各种类型的收敛性,首先我们给出随机种群列收敛的定义和为获得收敛性定理所需的两个引理.设 $A \subset I^m$ 是种群空间的子集.

定义 6.2.1　称随机种群列$\{X(t)\}$以概率 1 完全(相应地依概率)收敛到 A,如果

$$P\{\lim_{t\to\infty}[X(t) \in A]\} = 1 \quad (\text{相应地} \lim_{t\to\infty} P\{X(t) \in A\} = 1).$$

注 6.2.2　如果$\{X(t)\}$概率 1 收敛到种群 A,那么对于几乎所有 ω 存在正整数$\tau(\omega)$使得当 $t \geqslant \tau(\omega)$时,$X(t)(\omega) \in A$,即$\{X(t)\}$完全收敛到种群集 A(参见[17]).

引理 6.2.3　若区间$[0,1]$中的数列 a_t, b_t 和 $\nu_t, t = 1,2,\cdots$,满足

(a) $\sum_{t=1}^{\infty} a_t < \infty$,

(b) $\sum_{t=1}^{\infty} b_t = \infty$,

(c) $\sum_{t=1}^{\infty} b_t \nu_{t-1} < \infty$,

(d) $\nu_t \leqslant a_t + \nu_{t-1}, t = 1,2,\cdots$,

则 $\lim_{t\to\infty} \nu_t = 0$.

证明（反证法） 若 $t \to \infty$ 时，ν_t 不趋于 0，则 $\exists \varepsilon > 0$ 和上升的正整数列 $\{n_k, k = 1,2,\cdots\}$ 使 $\nu_{n_k} > \varepsilon$，根据条件(a)取 n_0 足够大使

$$\sum_{k=n_0}^{\infty} a(t) < \varepsilon/2,$$

因为对任意正整数 $s \geqslant n_0$，存在正整数 k 使 $n_k \leqslant s < n_{k+1}$，由条件(d)有

$$\sum_{t=s+1}^{n_{k+1}} a_t \geqslant \sum_{t=s+1}^{n_{k+1}} (\nu_t - \nu_{t-1}) = \nu_{n_{k+1}} - \nu_s > \varepsilon - \nu_s,$$

$$\nu_s > \varepsilon - \sum_{t=s+1}^{n_{k+1}} a_t > \varepsilon - \sum_{t=n_0}^{\infty} a_t > \varepsilon/2,$$

$$\frac{\varepsilon}{2} \sum_{t=n_0}^{n_\infty} b_t \leqslant \sum_{t=n_0}^{n_\infty} b_t \nu_t < \infty,$$

$$\sum_{t=n_0}^{\infty} b_t < \infty,$$

这与条件(b)矛盾，故 $\lim_{t\to\infty} \nu_t = 0$.

引理 6.2.4 若区间[0,1]中的数列 a_t, b_t 和 $\nu_t, t = 1,2,\cdots$，满足

(a) $\sum_{t=1}^{\infty} (1 - b_t) = \infty$,

(b) $\lim_{t\to\infty} a_t/(1 - b_t) = 0$,

(c) $\nu_t \leqslant a_t + b_t \nu_{t-1}, t = 1,2,\cdots$,

则 $\lim_{t\to\infty} \nu_t = 0$.

证明 由(b)对任意 $\varepsilon > 0$，存在正整数 N，当 $t > N$ 时，$a_t < (1 - b_t)\varepsilon$. 且由(c)和(a)得

$$\nu_t \leqslant (1 - b_t)\varepsilon + b_t \nu_{t-1}, \quad t = 1,2,\cdots,$$

$$\nu_t - \varepsilon \leqslant b_t(\nu_{t-1} - \varepsilon) \leqslant \cdots \leqslant \left(\prod_{k=N}^{t} b_k\right)(\nu_{N-1} - \varepsilon), \quad t = 1,2,\cdots,$$

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}(\nu_t - \varepsilon) \leqslant \overline{\lim_{t\to\infty}}\left(\prod_{k=N}^{t} b_k\right)(\nu_{N-1} - \varepsilon) = 0,$$

$$0 \leqslant \overline{\lim_{t\to\infty}} \nu_t \leqslant \varepsilon,$$

$$\Rightarrow \lim_{t\to\infty} \nu_t = 0.$$

本章考虑的遗传算法是由抽象的选择算子列$\{S_t\}$,变异算子列$\{M_t\}$和杂交算子列$\{G_t\}$交替迭代生成的随机种群列.任意给定初始种群$X(0)\in R(I^m)$,令

$$X(t) = S_tM_tC_t(X(t-1)),\quad t = 1,2,\cdots,$$
$$A(k) \equiv \{x \in I^m : n(x) \geqslant k\},\quad k = 0,1,\cdots,m.$$
$$U^* \equiv \{x = (i,i,\cdots,i) \in I^m, i \in B^*\},$$

$A(m)$和U^*分别称为最优种群集(OPS)和一致最优群集(UOPS).

6.2.1

本段研究随机种群列$\{X(t)\}$以概率1完全收敛到OPS $A(m_0)$.

定理 6.2.5　设S_t,M_t和C_t分别是选择,变异和杂交算子,它们的特征数分别为$\{m_0,\alpha(t)\}$,$\{\beta_k(t),k=0,m_0\}$和$\gamma(t)$,$t=1,2,\cdots$,在下面条件中

(a) $\sum_{t=1}^{\infty}(1-\alpha(t)\beta_{m_0}(t)\gamma(t)) < \infty$.

(b) $\sum_{t=1}^{\infty}\beta_0(t) = \infty$.

(a′) $\lim[1-\alpha(t)\beta_{m_0}(t)\gamma(t)]/\beta_0(t)=0$.

(A) 如果(a)和(b)成立,那么

$$P\{\lim_{t\to\infty}[X(t) \in A(m_0)]\} = 1.$$

特别当$m_0=m$时,

$$P\{\lim_{t\to\infty}[X(t) \in A(m)]\} = 1.$$

(B)如果(a′)和(b)成立,那么

$$\lim_{t\to\infty}P\{X(t) \in A(m_0)\} = 1.$$

证明　(一)设选择算子S,变异算子M和杂交算子C的特征数分别为$\{m_0,\alpha\}$,$\{\beta_k,k=0,m_0\}$和γ,其中$m_0\leqslant m$,令

$$g(x) = \begin{cases}1, & 当\ n(x) \geqslant m_0,\\ 0, & 当\ n(x) < m_0.\end{cases}$$

因为当$n(y)\geqslant 1$时,$m(y)\geqslant m_0$所以对任意$x\in I^m$

$$\begin{aligned}E[g(SMC(x))] &= P\{n(SMC(x)) \geqslant m_0\}\\ &\geqslant \sum_{n(y)\geqslant 1}P\{n(S(y)) = m(y)\}P\{MC(x) = y\}\\ &\geqslant \alpha P\{n(MC(x)) \geqslant 1\}.\end{aligned}\tag{6.2.1}$$

因为$\forall\, x\in I^m$,

$$P\{n(MC(x)) \geqslant 1\} = \sum_z P\{n(M(z)) \geqslant 1\}P\{C(x) = z\} \geqslant \beta_0.\tag{6.2.2}$$

而当 $n(x)\geqslant m_0$ 时，

$$\begin{aligned} P\{n(MC(x))\geqslant 1\} &\geqslant \sum_{n(y)\geqslant m_0} P\{n(M(y))\geqslant 1\}P\{C(x)=y\} \\ &\geqslant \beta_{m_0}P\{n(C(x))\geqslant m_0\} \\ &\geqslant \beta_{m_0}P\{n(C(x))=m\}\geqslant \beta_{m_0}\gamma, \end{aligned} \tag{6.2.3}$$

所以对任意 $X\in R(I^m)$，由(6.2.1)(6.2.2)，(6.2.3)得

$$\begin{aligned} E[g(SMC(X))] &= \sum_{n(x)\geqslant 0} E[g(SMC(x))]P\{X=x\} \\ &\geqslant \alpha\Big[\sum_{n(x)\leqslant m_0-1} + \sum_{n(x)\geqslant m_0}\Big]P\{n(MC(x))\geqslant 1\}P\{X=x\} \\ &\geqslant \alpha\beta_0 P\{0\leqslant n(X)\leqslant m_0-1\} \\ &\quad + \alpha\beta_{m_0}\gamma P\{m_0\leqslant n(X)\leqslant m\} \\ &= \alpha\beta_0(1-E[g(X)]) + \alpha\beta_{m_0}\gamma E[g(X)]. \end{aligned} \tag{6.2.4}$$

(二)在(4)中分别用 $S_t, M_t, C_t, X(t-1)$ 代替 S, M, C, X 得

$$E[g(X(t))] \geqslant \alpha(t)\beta_0(t)(1-E[g(X(t-1))]) + \alpha(t)\beta_{m_0}(t)\gamma(t)E[g(X(t-1))]. \tag{6.2.5}$$

令 $u_t=E[g(X(t))]$，$\nu_t=1-u_t$. 由(5)推得

$$u_t\geqslant \alpha(t)\beta_0(t)\nu_{t-1} + \alpha(t)\beta_{m_0}(t)\gamma(t)u_{t-1}, \tag{6.2.6}$$

(A)如果条件(a)和(b)成立，由(6)推得

$$u_t - u_{t-1} + [1-\alpha(t)\beta_{m_0}(t)\gamma(t)]u_{t-1}\geqslant \alpha(t)\beta_0(t)\nu_{t-1},$$

$$1+\sum_{t=1}^{\infty}[1-\alpha(t)\beta_{m_0}(t)\gamma(t)]u_{t-1}\geqslant \sum_{t=1}^{\infty}\alpha(t)\beta_0(t)\nu_{t-1}. \tag{6.2.7}$$

利用(6.2.7)和定理 6.2.5 的条件(a)可得

$$\sum_{t=1}^{\infty}\alpha(t)\beta_0(t)\nu_{t-1}<\infty,$$

$$\sum_{t=1}^{\infty}\beta_0(t)\nu_{t-1}<\infty. \tag{6.2.8}$$

由(6.2.6)，还可推得

$$\nu_t\leqslant 1-\alpha(t)\beta_{m_0}(t)\gamma(t) + \alpha(t)[\beta_{m_0}(t)\gamma(t)-\beta_0(t)]\nu_{t-1},$$

$$\nu_t\leqslant 1-\alpha(t)\beta_{m_0}(t)\gamma(t) + [1-\beta_0(t)]\nu_{t-1}, \tag{6.2.9}$$

$$\nu_t\leqslant 1-\alpha(t)\beta_{m_0}(t)\gamma(t) + \nu_{t-1}. \tag{6.2.10}$$

在引理 6.2.3 中用 $1-\alpha(t)\beta_{m_0}(t)\gamma(t)$ 和 $\beta_0(t)$ 分别代替 a_t 和 b_t，那么定理

6.2.5 的条件(a)与(b),(6.2.8)和(6.2.10)式分别对应于引理 6.2.3 的条件(a),(b),(c)和(d),因而

$$\lim_{t\to\infty} P\{n(X(t)) \geqslant m_0\} = \lim_{t\to\infty} E[g(X(t))] = \lim_{t\to\infty} u_t = 1 - \lim_{t\to\infty} \nu_t = 1.$$

(三)令

$$c_t = \sum_{k=1}^{t} [1 - \alpha(k)\beta_{m_0}(k)\gamma(t)],$$

往证随机过程$\{g(X(t)) + c_t, t = 1,2,\cdots\}$是非负有界下鞅. 非负有界是显然的,只证下鞅性. 即下面不等式成立

$$E[g(X(t) + c_t / X(1), X(2), \cdots, X(t-1))] \geqslant g(X(t-1)) + c_{t-1}.$$

由于$\{X(t), t = 1,2,\cdots\}$是马氏链,只须证明$\forall x \in I^m$,

$$E[g(X(t)) + c_t / X(t-1) = x] \geqslant g(x) + c_{t-1}$$
$$= g(x) - 1 + \alpha(t)\beta_{m_0}(t)\gamma(t). \tag{6.2.11}$$

事实上,当$n(x) < m_0$时,$g(x) = 0$,显然(6.2.11)成立. 当$n(x) \geqslant m_0$时,$g(x) = 1$,由(6.2.1)和(6.2.3)推得

$$E[g(SMC(x))] \geqslant \alpha\beta_{m_0}\gamma,$$

分别取 S, M, C 为 S_t, M_t, C_t 得

$$E[g(S_t M_t C_t(x))] \geqslant \alpha(t)\beta_{m_0}(t)\gamma(t),$$

故(6.2.11)成立. 由下鞅收敛定理知$\{g(X(t)) + c_t\}$ $a.s.$ 收敛,由数列$\{c_t\}$收敛知$\{g(X(t))\}$ $a.s.$ 收敛. 已证明$\{g(X(t))\}$依概率收敛到 1,故它 $a.s.$ 收敛到 1. 因$\{g(X(t))\}$的值域$\{0,1\}$是孤立集,对 $a.s.\ \omega \in \Omega$,存在 $\tau(\omega)$,当 $t \geqslant \tau(\omega)$时,$g(X(t)(\omega)) = 1$,即

$$P\{\lim_{t\to\infty}[X(t) \in A(m_0)]\} = P\{\lim_{t\to\infty}[n(X(t)) \geqslant m_0]\} = 1.$$

(B)如果(a′)和(b)成立,在引理6.2.4中用$1 - \alpha(t)\beta_{m_0}(t)\gamma(t)$和$1 - \beta_0(t)$分别代替 a_t 和b_t,那么定理 6.2.5 的(a′)与(b)和(8)式分别对应引理 6.2.4 的(b),(a)和(c),从而

$$\lim_{t\to\infty} P\{X(t) \in A(m_0)\} = 1.$$

应用定理 6.2.5 于经典遗传算法得下列推论.

推论 6.2.6　设选择算子 S_t 带特征数$\{m, \alpha(t)\}$,变异算子 M_t 带变异概率p_t,杂交算子 C_t 带杂交概率q_t, $t = 1,2,\cdots$,在下面条件中

(a) $\sum_{t=1}^{\infty} [1 - \alpha(t)(1 - p_t^m)(1 - q_t)] < \infty.$

(b) $\sum_{t=1}^{\infty} p_t^L = \infty.$

(a′) $\lim\limits_{t\to\infty}[1-\alpha(t)(1-p_t^m)(1-q_t)]/p_t^L=0$.

(A) 如果(a)和(b)成立,那么

$$P\{\lim_{t\to\infty}[X(t)\in A(m)]\}=1.$$

(B) 如果(a′)和(b)成立,那么

$$\lim_{t\to\infty}P\{X(t)\in A(m)\}=1.$$

注6.2.7 Tournament选择(例6.1.2)的特征数 $m_0=s<m$,由定理6.2.5只能推得

$$P\{\lim_{t\to\infty}[X(t)\in A(s)]\}=1,$$

即以概率1保证经有限次迭代后 $X(t)$ 中至少含有 s 个最优个体,而不能保证 $\{X(t)\}$ 以概率1或依概率收敛到OPS $A(m)$.

6.2.2

本段证明 $\{X(t)\}$ 依概率收敛到UOPS U^*.先说明对于比例选择算子 S,存在仅依赖于种群规模 m 的常数 $c(m)>0$,使

$$\theta\equiv\min\{p[S(x)\in U]:x\notin U\}\geqslant c(m). \tag{6.2.12}$$

事实上,$\forall x\in I^m$,如果个体 $i\in x^*\equiv\{i\in x:f(i)=\max\{f(j):j\in x\}\}$,那么

$$\begin{aligned}P\{S(x)\in U\}&\geqslant P\{S(x)=u(i)\}\\&=\Big[x(i)f(i)\Big/\sum_{j\in x}f(j)\Big]^m\geqslant(1/m)^m\equiv c(m),\\\theta&\geqslant c(m)>0.\end{aligned}$$

还有其它一些选择算子也满足(6.2.12).

定理6.2.8 设选择算子 S_t 满足(6.2.12),变异算子 M_t 带变异概率 p_t,杂交算子 C_t 是任意的,$t=1,2,\cdots$.如果

$$\lim_{t\to\infty}p_t=0,$$

那么

$$\lim_{t\to\infty}P\{X(t)\in U\}=1.$$

证明 设选择算子 S 满足(6.2.12),变异算子 M 带变异概率 p,杂交算子 C 是任意的.对任意种群 $X\in R(I^m)$,我们来估计概率 $P\{SMC(X)\in U\}$.因为 $\forall x\in I^m$,

(a) 当 $x\in U$,由 $S(x)\in U$ 和 $C(x)=x$ 得

$$\begin{aligned}P\{SMC(x)\in U\}&=P\{SM(x)\in U\}\\&=\Big(\sum_{y\in U}+\sum_{y\notin U}\Big)[P\{S(y)\in U\}P\{M(x)=y\}]\\&\geqslant P\{M(x)\in U\}+\theta P\{M(x)\notin U\}\end{aligned}$$

$$= \theta + (1-\theta)P\{M(x) \in U\}$$
$$\geqslant \theta + (1-\theta)P\{M(x) = x\}$$
$$\geqslant \theta + (1-\theta)(1-p)^{mL} \geqslant \theta. \tag{6.2.13}$$

(b) 当 $x \notin U$ 时,有

$$P\{SMC(x) \in U\} = \Big(\sum_{y \in U} + \sum_{y \notin U}\Big)P\{S(y) \in U\}P\{MC(x) = y\}$$
$$\geqslant P\{MC(x) \in U\} + \theta P\{MC(x) \notin U\} \geqslant \theta. \tag{6.2.14}$$

对任意 $X \in R(I^m)$,由(6.2.13)和(6.2.14)得

$$P\{SMC(X) \in U\}$$
$$= \Big(\sum_{x \in U} + \sum_{x \notin U}\Big)[P\{SMC(x) \in U\}P\{X = x\}]$$
$$\geqslant [\theta + (1-\theta)(1-p)^{mL}]P\{X \in U\} + \theta P\{X \notin U\}$$
$$\geqslant \theta + (1-\theta)(1-p)^{mL}P\{X \in U\}. \tag{6.2.15}$$

在(6.2.15)中用 $S_t, M_t, C_t, X(t-1)$ 分别代替 S, M, C, X 得

$$P\{X(t) \in U\} \geqslant \theta + (1-\theta)(1-p_t)^{mL}P\{X(t-1) \in U\}. \tag{6.2.16}$$

令 $\nu_t = 1 - P\{X(t) \in U\}$. 由(6.2.16)得

$$\nu_t \leqslant (1-\theta)(1-(1-p_t)^{mL}) + (1-\theta)(1-p_t)^{mL}\nu_{t-1}$$
$$\leqslant 1-(1-p_t)^{mL} + (1-\theta)\nu_{t-1}.$$

如果 $p_t \to 0, t \to \infty$,根据引理 6.2.4 得

$$P\{X(t) \in U\} = 1 - \nu_t \to 1, \quad t \to \infty,$$

定理 6.2.9　设选择算子 S_t 带特征数 m 和 $\alpha(t)$,变异算子 M_t 带变异概率 p_t,杂交算子 C_t 带杂交概率 q_t, $t = 1, 2, \cdots$. 如果

(a) $\sum_{t=1}^{\infty}(1-\alpha(t)(1-p_t^m)(1-q_t)) < \infty$

或

(a′) $\lim_{t \to \infty}\dfrac{1-\alpha(t)(1-p_t^m)(1-q_t)}{p_t^L} = 0$,

(b) $\sum_{t=1}^{\infty} p_t^L = \infty$,

(c) 存在仅依赖于种群规模 m 的常数 $c(m) > 0$ 使

$$\min\{p[S_t(x) \in U] : x \notin U\} \geqslant c(m), \qquad \forall t \geqslant 1,$$

那么

$$\lim_{t \to \infty} P\{[X(t) \in U^*]\} = \lim_{t \to \infty} P\{\bigcup_{i \in B^*}[X(t) = u(i)]\} = 1.$$

证明 由推论 6.2.6 和定理 6.2.8 易证.

§6.3 两类特殊类型遗传算法的收敛性

前面关于经典遗传算法的收敛结果与杂交概率和种群规模有关(要求 $m > L$);本段证明父代种群参与竞争和杰出者选择遗传算法的收敛性与杂交概率和种群规模无关.

(一)所谓父代种群参与竞争意指演化程序如下:

$$X(t) \xrightarrow{C_t} Y(t) \xrightarrow{M_t} Z(t) \xrightarrow{\text{扩张}} Z(t) \cup X(t) \xrightarrow{S_t} X(t+1).$$

这里选择算子 S_t 是 $I^{2m} \to R(I^m)$ 的映射. 对任意初始种群 $X(0) \in R(I^m)$,令

$$X(t) = S_t(X(t-1) \cup M_t C_t(X(t-1))), \quad t = 1,2,\cdots.$$

定理 6.3.1 设选择算子 S_t 带特征数 m_0 和 $\alpha(t)$,变异算子 M_t 带变异概率 p_t,杂交算子 C_t 是任意的,$t=1,2,\cdots$,在下面四个条件中,

(a) $\sum_{t=1}^{\infty}[1-\alpha(t)] < \infty$.

(a′) $\lim_{t\to\infty}(1-\alpha_t)/p_t^L = 0$.

(b) $\sum_{t=1}^{\infty} p_t^L = \infty$.

(c) $\lim_{t\to\infty} p_t = 0$.

(A) 如果(a)和(b)成立,那么

$$P\{\lim_{t\to\infty}[X(t) \in A(m_0)]\} = 1.$$

(B) 如果(a′)和(b)成立,那么

$$\lim_{t\to\infty} P\{X(t) \in A(m_0)\} = 1.$$

(C) 如果(a)或(a′),(b)和(c)成立,那么

$$\lim_{t\to\infty} P\{X(t) \in U^*\} = 1.$$

证明 设选择算子 S 带特征数 m_0 和 α,变异算子 M 带变异概率 p,杂交算子 C 是任意的. 对任意 $X \in R(I^m)$,有

$$\begin{aligned}
&P\{n(S(X \cup MC(X))) \geqslant m_0\} \\
&\geqslant \sum_{n(w)\geqslant 1} P\{n(S(w)) \geqslant m(w)\} P\{X \cup MC(X) = w\} \\
&\geqslant \alpha P\{n(X \cup MC(X)) \geqslant 1\} \\
&= \alpha \sum_{k=0}^{m} \sum_{n(x)=k} P\{n(x \cup MC(x)) \geqslant 1\} P\{X = x\}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \alpha \sum_{n(x)=0} P\{n(MC(x)) \geqslant 1\} P\{X = x\} \\
&\quad + \alpha \sum_{n(x)\geqslant 1} P\{n(x \cup MC(x)) \geqslant 1\} P\{X = x\} \\
&\geqslant \alpha\beta_0 P\{n(X) = 0\} + \alpha P\{n(X) \geqslant 1\} \\
&\geqslant \alpha\beta_0 P\{0 \leqslant n(X) \leqslant m_0 - 1\} + \alpha P\{n(X) \geqslant m_0\}. \qquad (6.3.1)
\end{aligned}
$$

在(6.2.18)中用 $S_t, M_t, C_t, X(t-1)$ 分别代替 S, M, C, X 得

$$
\begin{aligned}
&P\{n(X(t)) \geqslant m_0\} \\
&\geqslant \alpha(t)\beta_0(t) P\{0 \leqslant n(X(t-1)) \leqslant m_0 - 1\} \\
&\quad + \alpha(t) P\{n(X(t-1)) \geqslant m_0\},
\end{aligned}
$$

其中 $\beta_0(t) = O(p_t^L)$(参见例6.1.5),现在我们能如同证明定理6.2.5一样地证明定理6.3.1的(A)和(B),并且利用定理6.2.8得到定理6.3.1的(C).

推论 6.3.2　设 $S_t: I^{2m} \to R(I^m)$ 是比例选择算子带尺度函数

$$\sigma_t(u) = e^{-u/T(t)}, \quad u \in R^+, \quad t = 1,2,\cdots,$$

$T(t)$ 是退火温度,变异算子 M_t 带变异概率 $p_t \equiv p > 0$, C_t 是任意杂交算子.如果

$$T(t) \to 0, \quad t \to \infty,$$

那么

$$\lim_{t\to\infty} P\{[X(t) \in A(m)]\} = 1.$$

(二)杰出者选择遗传算法概述如下:

(1)置 $t=0$,任意给定初始种群 $X(0) \in R(I^m)$.

(2)从当前种群中独立地选取 $m-1$ 对母体,进行杂交得到 $m-1$ 个中间个体.

(3)独立地对 $m-1$ 个中间个体进行变异得到下一代的 $m-1$ 个随机个体 $X_1(t), \cdots, X_{m-1}(t)$.

(4)在种群 $X(t-1)$ 中选取一个局部最佳个体作为下代种群的第 m 个个体 $X_m(t)$.

(5)停止,若某个停止准则被满足;否则,置 $t=t+1$,并转到第2步.

如果我们把第(2)步的选择和杂交复合,视为杂交算子 $C_t: I^m \to R(I^{m-1})$,把第(3)步由 $I^m \to R(I^{m-1})$ 的变异算子记为 M_t,把第(4)步由 $I^m \to R(I)$ 的选择算子记为 S_t^*,则第 t 代随机种群可表示为.

$$X(t) = M_t C_t(X(t-1)) \cup S_t^*(X(t-1)), \quad t = 1,2,\cdots.$$

定理 6.3.3　若杰出者选择遗传算法中的变异概率 $\{p_t\}$ 满足

$$\sum_{t=1}^{\infty} p_t^{L-1} = \infty,$$

则

$$\lim_{t\to\infty} P\{[X(t) \in A(1)]\} = 1.$$

证明 因为

$$\begin{aligned}
&P\{n(X(t)) = 0\} \\
&= P\{n(M_tC_t(X(t-1))) = 0,\quad n(S_t^*(X(t-1))) = 0\} \\
&= P\{n(M_tC_t(X(t-1))) = 0,\quad n(X(t-1)) = 0\} \\
&= \sum_{n(x)=0} P\{n(M_tC_t(x)) = 0\} P\{X(t-1) = x\} \\
&= \sum_{n(x)=0} \sum_{y} P\{n(M_t(y)) = 0\} P\{C_t(x) = y\} P\{X(t-1) = x\} \\
&\leqslant \max_{n(y)\geqslant 0} \{P\{n(M_t(y)) = 0\}\} P\{n(X(t-1)) = 0\} \\
&\leqslant (1 - \beta_0(t)) P\{n(X(t-1)) = 0\},
\end{aligned}$$

令

$$u_t = P\{n(X(t)) = 0\},$$

由上面不等式得

$$u_t \leqslant (1 - \beta_0(t)) u_{t-1} \leqslant \cdots \leqslant \prod_{k=1}^{t} (1 - \beta_0(k)).$$

因为

$$\beta_0(t) = O(p_t^{L-1}), \quad \sum_{t=1}^{\infty} p_t^{L-1} = \infty,$$

故有 $u_t \to 0, t \to \infty$，进而

$$\lim_{t\to\infty} P\{[X(t) \in A(1)]\} = \lim_{t\to\infty} P\{n(X(t)) \geqslant 1\} = 1.$$

定理 6.3.4 设变异算子 M_t 带变异概率 p_t，杂交算子 C_t 带杂交概率 $q_t, t = 1, 2, \cdots$. 若

(1) $\sum_{t=1}^{\infty} p_t^{L-1} = \infty$，

(2) $\lim_{t\to\infty} p_t / (1 - q_t)^{m-1} = 0$

(特别当 $q_t \equiv q < 1$ 时，条件(2)成为 $p_t \to 0, t \to \infty$)，则

$$\lim_{t\to\infty} P\{[X(t) \in U^*]\} = 1.$$

下面用 U' 表示规模是 $m-1$ 的一致种群集，$u'(i) = (\overbrace{i, i, \cdots, i}^{m-1})$，$|x^*|$ 是 x^* 中的个体数.

证明 对任意种群 $x \in I^m$，任意个体 $i \in x$，根据在第 2 步杂交算子的定义，有

$$P\{C_t(x)=u'(i)\}\geqslant\left[\frac{1-q_t}{m(m-1)}\right]^{m-1}\equiv c(m)(1-q_t)^{m-1},$$

$$\begin{aligned}
&P\{X(t)\in U\}\\
&=P\{M_tC_t(X(t-1))\cup S_t^*(X(t-1))\in U\}\\
&=\Big(\sum_{x\in U}+\sum_{x\notin U}\Big)P\{M_tC_t(x)\cup S_t^*(x)\in U\}P\{X(t-1)=x\}\\
&=\sum_{x\in U}P\{M_t(x)\in U'\}P(X(t-1)=x)\\
&\quad+\sum_{x\notin U}P\{M_tC_t(x)\cup S_t^*(x)\in U\}P\{X(t-1)=x\}\\
&\geqslant(1-p_t)^{(m-1)L}P\{X(t-1)\in U\}\\
&\quad+\sum_{x\notin U}\sum_{i\in x^*}P\{M_tC_t(x)=u'(i)\}P\{S_t^*(x)=i\}P\{X(t-1)=x\}\\
&\geqslant(1-p_t)^{(m-1)L}P\{X(t-1)\in U\}\\
&\quad+\sum_{x\notin U}\sum_{i\in x^*}P\{M_tC_t(x)=u'(i)\}\frac{1}{|x^*|}P\{X(t-1)=x\}.
\end{aligned}$$

且当 $i\in x^*\subset x$ 时

$$\begin{aligned}
P\{M_tC_t(x)=u'(i)\}&=\sum_y P\{M_t(y)=u'(i)\}P\{C_t(x)=y\}\\
&\geqslant P\{M_t(u'(i))=u'(i)\}P\{C_t(x)=u'(i)\}\\
&\geqslant(1-p_t)^{(m-1)L}c(m)(1-q_t)^{m-1},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&P\{X(t)\in U\}\\
&\geqslant(1-p_t)^{(m-1)L}P\{X(t-1)\in U\}\\
&\quad+\sum_{x\notin U}\sum_{i\in x^*}(1-p_t)^{(m-1)L}c(m)(1-q_t)^{m-1}\frac{1}{|x^*|}P\{X(t-1)=x\}\\
&\geqslant(1-p_t)^{(m-1)L}P\{X(t-1)\in U\}\\
&\quad+c(m)(1-q_t)^{m-1}(1-p_t)^{(m-1)L}P\{X(t-1)\notin U\}.
\end{aligned}$$

令 $\nu_t=P\{X(t)\notin U\}$，上面不等式变为

$$\begin{aligned}
\nu_t&\leqslant1-(1-p_t)^{(m-1)L}+(1-p_t)^{(m-1)L}[1-c(m)(1-q_t)^{m-1}]\nu_{t-1}\\
&\leqslant(m-1)Lp_t+[1-c(m)(1-q_t)^{m-1}]\nu_{t-1}.
\end{aligned}$$

由引理 6.2.3 得

$$\lim_{t\to\infty}P\{X(t)\in U\}=1-\lim_{t\to\infty}\nu_t=1.$$

由定理 6.3.3 得

$$\lim_{t\to\infty}P\{X(t)\in U^*\}=\lim_{t\to\infty}P\{X(t)\in A(1),X(t)\in U\}=1.$$

第七章　模拟退火算法

解组合优化问题通常有两个可行的方法.一种方法是用优化算法,在尽可大的运行时间中,产生一个全局最优解;另一种方法是用近似算法,在可接受运行时间内产生近似解.近似算法又可分为两类:改编为特殊问题的算法和可应用到大规模组合优化问题的一般算法.在第一类中为了避免方法内在的缺陷(对于相关问题的有限应用),希望能有一般近似算法对于大规模组合优化问题能获得近似优化解.模拟退火算法就是这样一种算法,它是解组合优化问题的通用优化方法,是以随机方法为基础.

本章对模拟退火算法的数学理论作一个初步介绍.在§7.1介绍模拟退火算法的马尔可夫链数学模型.§7.2和§7.3分别讨论齐次算法和非齐次算法的渐近收敛性.

§7.1　模拟退火算法的数学模型

7.1.1　算法介绍

模拟退火算法的原始形式是以固体模拟退火和解大规模组合优化问题之间的类似性作为基础的.

退火过程中,在每个温度值 T,固体达到热均衡时,固体处于能量 e 状态的概率,由 Boltzman 分布刻画,即

$$P\{E = e\} = \frac{1}{Z(T)}\exp\left\{-\frac{e}{K_B T}\right\},$$

其中 $Z(T)$ 是规范化因子,K_B 是 Boltzman 常数,当温度 T 趋于零时,只有处于能量为最小值的状态有非零的发生概率.然而,如果冷却过程太快,也就是说不是对于每个温度值固体到达了热平衡,缺陷可能会被"冻结"进入固定,达到非均匀的亚稳态,而不是低能量的晶态.

对于恒定的温度 T,为了模拟固体的热平衡演化,Metropolis 等人提出了一个 Monto-Carlo 方法,按下述方式产生固体的状态序列:先给定以粒子相对位置表征的初始状态作为固体的当前状态,然后使随机选取的某个粒子的位置产生一个小的随机扰动,如果扰动后的状态与受扰动的状态之间的能量差 ΔE 是负的,即扰动结果固体进入低能量状态,过程就以新的状态继续进行.如果 $\Delta E \geqslant 0$,那么接受扰动后的状态的概率由 $\exp\left\{-\frac{\Delta E}{K_B T}\right\}$ 给出.按照这个接

受准则，系统最终演化到热平衡.即经过大量的扰动之后，固体状态的概率分布趋于 Boltzman 分布.这个 Monte-Carol 方法在统计力学中被称为 Metropolis 算法.

在组合优化问题中，给定一对(R,C)，R 是全体“结构”(Configuration)集合，$C:R\to R$ 是价值函数，求“结构”i_0，使 $C(i_0)=\min\limits_{i\in R}C(i)$.

Metropolis 算法也可用来产生组合优化问题的“结构”序列，在这种情形，“结构”扮演固体所处状态的角色，而价值函数 C 和控制参数 c 分别起了能量和温度的作用.现在模拟退火算法能看作为在一列下降的控制参数值赋值的 Metropolis 算法列.它能被描述如下：开始，控制参数被给定在一个高值，随后产生组合优化问题的一列“结构”.如同在迭代改进算法中一样，一个生成机制被定义，使得给定一个“结构”i，通过从 i 的邻域随机选取一个元素而得到另一个“结构”j.后者相应于Metropolis算法中的小扰动.令$\Delta C_{ij}=C(j)-C(i)$，那么“结构”j 是序列中下一个“结构”的概率由 $\min\{1,\exp\{-\Delta C_{ij}/c\}\}$ 给出，即当 $\Delta C_{ij}\leqslant 0$，概率为 1；当 $\Delta C_{ij}>0$ 时，概率为 $\exp\{-\Delta C_{ij}/c\}$.因此有一个非零的概率保持比当前“结构”有更高价的一个“结构”.这个过程一直进行到均衡被达到，即“结构”的概率分布逼近 Boltzman 分布，此时它由下式给出

$$P\{\text{“结构”}=i\}\equiv q_i(c)=\frac{1}{Q(c)}\exp\left\{-\frac{C(i)}{c}\right\},$$

其中 $Q(c)$是规范化常数，依赖于控制参数 c.

控制参数逐步降低，在每一步按上述方式产生一列“结构”，使系统趋于平衡；对于某个小的控制参数 c，终止算法.最后“冻结”的“结构”取作为所考虑问题的解.

7.1.2　算法的数学模型

给定一邻域结构，模拟退火算法接连地试图将当前“结构”变换到它的邻域中的一个“结构”，这个机制在数学上能用马尔可夫链很好地描述：一序列试验，每个试验的结果仅依赖前一个试验的结果.对于模拟退火，试验对应着变换，很明显变换的结果仅依赖于前一个变换的结果.

马氏链可通过一组条件概率$\{P_{ij}(k-1,k)\}$来刻化：给定第 $k-1$ 次试验结果是 i，$P_{ij}(k-1,k)$是第 k 次试验结果为j 的概率.

对于模拟退火，条件概率 $P_{ij}(k-1,k)$表示第 k 次变换是从“结构”i 到“结构”j 的概率.若用 $X(k)$表示第 k 次变换后得到的“结构”，则有

$$P_{ij}(k-1,k)=P\{X(k)=j/X(k-1)=i\},$$

$$a_i(k) \equiv P(X(k) = i) = \sum_l a_l(k-1)P_{li}(k-1,k), \quad k = 1,2,\cdots$$

因为转移概率依赖于控制参数 c，如果 c 保持不变，相应的马氏链是齐次的，其转移矩阵 $P=P(c)$ 能被定义如下：

$$P_{ij}(c) = \begin{cases} G_{ij}(c)A_{ij}(c), & j \neq i, \\ 1 - \sum_{l=1, l\neq i}^{|R|} G_{il}(c)A_{il}(c), & j = i, \end{cases} \tag{7.1.1}$$

其中 $|R|$ 表示集 R 中元素个数.

每个转移概率定义为下面两个条件概率的乘积：由"结构"i 生成"结构"j 的生成概率 $G_{ij}(c)$ 和接受"结构"j 的接受概率 $A_{ij}(c)$. 相应的矩阵 $G(c)$ 和 $A(c)$ 分别称为生成矩阵和接受矩阵.

前面已经指出，在算法执行过程中，控制参数 c 要减小，按 c 的减小方式，算法可以分为两种形式：

1. 齐次算法：算法由一列齐次马氏链描述，每个马氏链是在固定的 c 值生成，c 在马氏链序列中是减少的.

2. 非齐次算法：算法由单独一个非齐次马氏链描述，c 的值在马氏链的变换序列中减少.

用 R_{opt} 表示全局最小"结构"集. 我们将在下面节说明：

对于齐次算法如果

(1) 每个马氏链是无限长，

(2) 矩阵 $A(c_l)$ 和 $G(c_l)$ 满足某些条件（c_l 是第 l 个马氏链的控制参数值），

(3) $\lim_{l\to\infty} c_l = 0$，

则有

$$\lim_{k\to\infty} P\{X(k) \in R_{opt}\} = 1.$$

对于非齐次算法如果

(1) $A(c_k)$ 和 $G(c_k)$ 满足某些条件，

(2) $\lim_{k\to\infty} c_k = 0$，

(3) $A(c_k)$ 还满足其它一些条件且 $\{c_k\}$ 的收敛速度不比 $O([\log k]^{-1})$ 块，

则有

$$\lim_{k\to\infty} P\{X(k) \in R_{opt}\} = 1.$$

§7.2 齐次算法的渐近收敛性

齐次算法收敛性证明的实质是在一定条件下，齐次马氏链的平稳分布存

在，平稳分布 $q=(q_i)$ 由下式给出

$$q_i = \lim_{k\to\infty} P\{X(k)=i/X(0)=j\}, \quad \forall j, \tag{7.2.1}$$

由(7.2.1)可得

$$q_i = \lim_{k\to\infty} P\{X(k)=i\} = \lim_{k\to\infty} a(0)^{\mathrm{T}}P^k, \tag{7.2.2}$$

这里 $a(0)$ 是初始分布，$a_i(0)=P(X(0)=i)$，$i\in R$，这样平稳分布是经无穷次变换后“结构”的概率分布. 显然，对于模拟退火，因转移概率矩阵 P 依赖于控制参数 c，故 q 也依赖于 c，$q=q(c)$. 现在收敛性证明基于下面论断：首先推导生成矩阵 $G(c)$ 和接受矩阵 $A(c)$ 的条件，确保平稳分布 $q(c)$ 存在；接着这些条件被改善，使得对于下降的 c，$q(c)$ 收敛到全局最优“结构”集上的均匀分布，即

$$\lim_{c\downarrow 0} q(c) = \pi, \tag{7.2.3}$$

$|R|$ 维向量 π 是

$$\pi_i = \begin{cases} |R_{\mathrm{opt}}|^{-1}, & i\in R_{\mathrm{opt}}, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases} \tag{7.2.4}$$

结合(7.2.2)和(7.2.3)得

$$\lim_{c\downarrow 0}\lim_{k\to\infty} P(X(k)\in R_{\mathrm{opt}}) = 1. \tag{7.2.5}$$

7.2.1　平稳分布的存在性

定理(见定理 1.3.26)　若有限齐次马氏链是不可约、非周期的，则平稳分布 q 存在，且向量 q 由下面方程惟一决定

$$\forall i, \quad q_i > 0, \quad \sum_i q_i = 1, \tag{7.2.6}$$

$$\forall i, \quad q_i = \sum_j a_j P_{ji}. \tag{7.2.7}$$

由(7.2.7)看出 q 是矩阵 P 的特征值为 1 的左特征向量.

在模拟退火情形，矩阵 P 由(7.1.1)给出. 因为我们假设 $\forall i,j$，$\forall c>0$，$A_{ij}(c)>0$，故为使 P 不可约，只须假定由 $G(c)$ 导出的马氏链是不可约的，即 $\forall i,j\in R$，存在 $n\geqslant 1$，存在 $l_0,l_1,\cdots,l_n\in R(l_0=i,l_p=j)$ 使

$$G_{l_k l_{k+1}}(c) > 0, \qquad 0\leqslant k\leqslant n. \tag{7.2.8}$$

又因为为了使一个不可约马氏链是无周期的，只须下面条件满足：

$$\forall c>0, \quad \exists i_c\in R, \quad P_{i_c i_c}(c) > 0, \tag{7.2.9}$$

故只要假设：$\forall c>0$，$\exists i_c,j_c\in R$ 使

$$A_{i_c j_c}(c) < 1, \quad G_{i_c j_c}(c) > 0. \tag{7.2.10}$$

事实上，由(7.2.10)和 $\forall i,j$，$A_{ij}\leqslant 1$ 可得

$$\sum_{l=1, l\neq i_c, j_c}^{|R|} A_{i_c l}(c) G_{i_c l}(c)$$

$$= \sum_{l=1, l\neq i_c, j_c}^{|R|} A_{i_c l}(c) G_{i_c l}(c) + A_{i_c j_c}(c) G_{i_c j_c}(c)$$

$$< \sum_{l=1, l\neq i_c}^{|R|} G_{i_c l}(c) \leqslant 1, \tag{7.2.11}$$

故

$$P_{i_c i_c} = 1 - \sum_{l=1, l\neq i_c}^{|R|} A_{i_c l}(c) G_{i_c l}(c) > 0.$$

(7.2.9)成立.

注 在算法的早期形式中,接受概率被定义为

$$A_{ij}(c) = \min\{1, \exp\{-C(j) - C(i)\}/c\}, \tag{7.2.12}$$

综上所述我们知道如果矩阵 $A(c)$ 和 $G(c)$ 分别满足(7.2.9)和(7.2.8),那么以(7.1.1)给出的条件概率为转移矩阵的齐次马氏链具有平稳分布.

7.2.2 平稳分布的收敛性

现在对矩阵 $A(c)$ 和 $G(c)$ 补加条件,确保平稳分布收敛到由(7.2.4)给出的均匀分布 π. 最一般的最少限制的条件是由 Romeo 和 Sangiovanni-Vincentelli[38]给出,他们基于下面事实:

$\forall i \in R$, $q_i(c)$ 有如下表示

$$q_i(c) = \frac{\psi(C(i), c)}{\sum_j \psi(C(j), c)}, \tag{7.2.13}$$

其中 $\psi(r, c)$ 是二元函数满足:

1. $\forall i \in R, c > 0, \psi(C(c), c) > 0,$ (7.2.14)

2. 全局平衡性,即 $\forall j \in R$,

$$\sum_{i=1, i\neq j}^{|R|} \psi(C(i), c) G_{ij}(c) A_{ij}(c)$$

$$= \psi(C(j), c) \sum_{i=1, i\neq j}^{|R|} G_{ji}(c) A_{ji}(c), \tag{7.2.15}$$

现在来验证,由(7.2.13)给出的 $q(c)$ 的确是惟一的平稳分布;显然 $q(c)$ 满足(7.2.6),只须验证(7.2.7)也满足,事实上,根据(6.2.15),

$$\sum_l q_l P_{li} = \sum_{l\neq i} \frac{\psi(C(l), c)}{\sum_j \psi(C(j), c)} G_{li} A_{li}$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{\psi(C(i),c)}{\sum_j\psi(C(j),c)}\Big(1-\sum_{l\neq i}G_{il}(c)A_{il}(c)\Big)\\
&=q_i+\frac{\psi(C(i),c)}{\sum_j\psi(C(j),c)}\sum_{l\neq i}G_{il}(c)A_{il}(c)\\
&\quad-\frac{\psi(C(i),c)}{\sum_j\psi(C(j),c)}\sum_{l\neq i}G_{il}(c)A_{il}(c)\\
&=q_i.
\end{aligned}
$$

文献[38]给出确保$\lim_{c\downarrow 0}q(c)=\pi$ 的条件是

1. $\lim_{c\downarrow 0}\psi(r,c)=\begin{cases}0, & 当\ r>0,\\ \infty, & 当\ r<0.\end{cases}$　　(7.2.16)
2. $\dfrac{\psi(r_1,c)}{\psi(r_2,c)}=\psi(r_1-r_2,c).$　　(7.2.17)
3. $\forall c>0,\quad \psi(0,c)=1.$　　(7.2.18)

由(7.2.14)~(7.2.18)给出的条件,对于确定马氏链的平稳分布是充分条件,但不是必要的;同时,利用(7.2.14)~(7.2.18)很难建立平稳分布的明确形式,因此许多学者把注意力集中在二元函数 $\psi(r,c)$的特殊选择上,以便得到$q(c)$的更明确形式,但以对矩阵 $G(c)$和 $A(c)$更多限制为代价.如下面定理所示.

定理 7.2.1 (Folklore)　假设对任意 $i_0\in R_{\text{opt}}$,取

$$A_{i_0 i}(c)=\psi(C(i)-C_{\text{opt}},c),\quad i\in R, \tag{7.2.19}$$

C_{opt}表示价值函数 C 的最小值,又设生成矩阵 G 不依赖于c;只要矩阵 $A(c)$和 G 满足下面条件

(a1) $\forall i,j\in R, G_{ji}=G_{ij},$　　(7.2.20)

(a2) $\forall i,j,k\in R,$

$$C(i)\leqslant C(j)\leqslant C(k)\Rightarrow A_{ik}(c)=A_{ij}(c)A_{jk}(c), \tag{7.2.21}$$

(a3) $\forall i,j\in R, C(i)\geqslant C(j)\Rightarrow A_{ij}(c)=1,$　　(7.2.22)

(a4) $\forall i,j\in R, c>0, C(i)<C(j)\Rightarrow 0<A_{ij}(c)<1,$　　(7.2.23)

那么平稳分布 $q(c)$由下式给出

$$\forall i\in R,\quad q_i(c)=\frac{A_{i_0 i}(c)}{\sum_{j\in R}A_{i_0 j}(c)}. \tag{7.2.24}$$

证明　首先注意,若记 $N=\sum_{j\in R}A_{i_0 j}(c)$,则有

$$\sum_j q_j(c)P_{ji}(c)$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{j\neq i, C(j)\leqslant C(i)} \frac{1}{N} A_{i_0 j}(c) G_{ji} A_{ji}(c) \\
&\quad + \sum_{j\neq i, C(j)> C(i)} \frac{1}{N} \cdot A_{i_0 j}(c) G_{ji} A_{ji}(c) + q_i(c) P_{ii}(c) \\
&= \sum_{j\neq i, C(j)\leqslant C(i)} \frac{1}{N} A_{i_0 i}(c) G_{ij} + \sum_{j\neq i, C(j)> C(i)} \frac{1}{N} A_{i_0 j}(c) G_{ij} + q_i(c) P_{ii}(c) \\
&= q_i(c) \sum_{j\neq i, C(j)\leqslant C(i)} G_{ij} + \sum_{j\neq i, C(j)> C(i)} q_j(c) G_{ij} + q_i(c) P_{ii}(c) q_i(c) P_{ii}(c) \\
&= q_i(c)\Big(1 - \sum_{j\neq i, C(j)\leqslant C(i)} G_{ij} A_{ij}(c) - \sum_{j\neq i, C(j)> C(i)} G_{ij} A_{ij}(c)\Big) \\
&= q_i(c) - q_i(c) \sum_{j\neq i, C(j)\leqslant C(i)} G_{ij} - \sum_{j\neq i, C(j)> C(i)} \frac{1}{N} A_{i_0 i}(c) G_{ij} A_{ij}(c) \\
&= q_i(c) - q_i(c) \sum_{j\neq i, C(j)\leqslant C(i)} G_{ij} - \sum_{j\neq i, C(j)> C(i)} q_j(c) G_{ij},
\end{aligned}
\tag{7.2.25}
$$

由(7.2.24)和(7.2.25)得

$$
\forall\, i \in R, \sum_j q_j(c) P_{ji}(c) = q_i(c). \tag{7.2.26}
$$

另外,由(7.2.24)给定的 $q(c)$满足(7.2.6)是显然的.

注 (7.2.20)~(7.2.23)蕴含(7.2.15)(带 $\psi(C(i),c)=\psi(C_{\text{opt}},c)\cdot A_{i_0 i}(c)$),但逆不真.

事实上,(7.2.15)的左边等于

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i\neq j} \psi(C(i),c) G_{ij}(c) A_{ij}(c) \\
&= \sum_{i\neq j} \psi(C_{\text{opt}},c) G_{ij}(c) A_{i_0 i}(c) A_{ij}(c).
\end{aligned}
\tag{7.2.27}
$$

(i) 若 $C(i)\leqslant C(j)$,(7.2.27)式右边等于

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i\neq j} \psi(C_{\text{opt}},c) G_{ji}(c) A_{i_0 j}(c) \\
&= \psi(C(j),c) \sum_{i\neq j} G_{ji}(c) \\
&= \psi(C(j),c) \sum_{i\neq j} G_{ji}(c) A_{ji}(c).
\end{aligned}
$$

(ii) 若 $C(j)<C(i)$,(7.2.27)式右边等于

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i\neq j} \psi(C_{\text{opt}},c) G_{ji}(c) A_{i_0 j} A_{ji}(c) A_{ij}(c) \\
&= \psi(C(j),c) \sum_{i\neq j} G_{ji}(c) A_{ji}(c).
\end{aligned}
$$

故(7.2.15)成立.

另外(7.2.20)~(7.2.23)隐含假设接受概率仅依赖于“结构”的价值,并

不依赖于“结构”本身.所以 $A_{i_0 i}(c)$ 不依赖于 i_0 的特定选取,因为

$$\forall\ i_0 \in R_{\text{opt}}, \qquad C(i_0) = C_{\text{opt}}. \tag{7.2.28}$$

此外,为了确保 $\lim_{c \downarrow 0} q(c) = \pi$,下面条件是充分的.

(a5) $\forall\, i, j \in R, C(i) < C(j) \Rightarrow \lim_{c \downarrow 0} A_{ij}(c) = 0$, (7.2.29)

因为(7.2.22)和(7.2.29)确保 $\lim_{c \downarrow 0} q(c) = \pi$.

在早期算法的公式中,$A(c)$ 和 G 分别由(7.2.12)和下式给出

$$G_{ij} = \begin{cases} R^{-1}, & \text{当 } j \in R_i, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases} \tag{7.2.30}$$

其中 R_i 是“结构” i 的邻域,并且 $R = |R_i|$, $\forall\, i \in \mathscr{R}$. 在这种情形,条件(a1)~(a5)被满足,所以与 $A(c)$ 和 G 关联的马氏链是不可约、非周期的,其平稳分布由下式给出

$$q_i(c) = \frac{\exp\{-(C(i) - C_{\text{opt}})/c\}}{\sum_{j \in \mathscr{R}} \exp\{-(C(i) - C_{\text{opt}})/c\}}, \tag{7.2.31}$$

注　为保证定理 7.2.1 的条件被满足,条件(a1)~(a5)是充分的,但不是必要的.例如,取接受矩阵 $A(c)$ 为

$$A_{ij}(c) = \left(1 + \exp\left(-\frac{C(j) - C(i)}{c}\right)\right)^{-1}, \tag{7.2.32}$$

它不满足条件(a2)和(a3),但它能引导到由(7.2.31)给出的平稳分布,这点可通过将(7.2.31)和(7.2.32)分别给出的 $q(c)$ 和 $A(c)$ 代入(7.2.7)式直接验证该式成立.

§7.3　非齐次算法的渐近收敛性

前一节说明了在矩阵 $A(c)$ 和 $G(c)$ 满足一定的条件下,如果对每个控制参数 $c_l(l=0,1,\cdots)$ 相应马氏链是无限长,并且 $c_l \to 0, l \to \infty$;那么模拟退火算法概率 1 收敛到全局极小,即有

$$\lim_{c \downarrow 0} \lim_{k \to \infty} P\{X(k) = i\} = \lim_{c \downarrow 0} q_i(c) = \begin{cases} 1/|R_{\text{opt}}|, & i \in R_{\text{opt}}, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases} \tag{7.3.1}$$

本节讨论(7.3.1)左边的极限沿 (c,k) 平面中的一条线路进行,即当 c 取 c_k 时,算法的收敛性;这时一个非齐次马氏链被考查,其转移概率定义为

$$P_{ij}(k-1,k) = \begin{cases} G_{ij}(c_k)A_{ij}(c_k), & \forall j \neq i, \\ 1 - \sum_{l=1, l \neq i}^{|R|} G_{il}(c_k)A_{il}(c_k), & j = i. \end{cases} \tag{7.3.2}$$

今后我们总假定控制参数数列$\{c_k\}$是下降列,而且

$$\lim_{k\to\infty} c_k = 0. \tag{7.3.3}$$

我们需要非齐次马氏链的一些结果.

定义 7.3.1 一个非齐次马氏链称为是弱遍历(ergodic)的,如果$\forall\, m\geqslant 1, i,j,l\in\mathscr{R}$:

$$\lim_{k\to\infty}(P_{il}(m,k) - P_{jl}(m,k)) = 0. \tag{7.3.4}$$

定义 7.3.2 一个非齐次马氏链称为是强遍历的,如果存在$\mathscr{R}$上一概率分布π,使得$\forall\, m\geqslant 1, \forall\, i,j\in\mathscr{R}$

$$\lim_{k\to\infty} P_{ij}(m,k) = \pi_j. \tag{7.3.5}$$

易知,若(7.3.5)成立,则有

$$\lim_{k\to\infty} P\{X(k) = j\} = \pi_j. \tag{7.3.6}$$

对于齐次马氏链,弱遍历与强遍历两个概念等价.

下面两个定理分别提供判断非齐次马氏链是弱遍历和强遍历的条件.

定理 7.3.3[39] 一个非齐次马氏链是弱遍历的当且仅当存在严格增的正整数列$\{k_l, l=0,1,2,\cdots\}$使得

$$\sum_{l=0}^{\infty}(1 - \tau_1(P(k_l, k_{l+1}))) = \infty, \tag{7.3.7}$$

其中$\tau_1(P)$是矩阵P的遍历系数,即

$$\tau_1(P) = 1 - \min_{i,j}\sum_{l}\min(P_{il}, P_{jl}). \tag{7.3.8}$$

定理 7.3.4[40] 一个非齐次马氏链是强遍的.如果它是弱遍历的,而且对所有k,存在向量$\pi(k)$,它是矩阵$P(k-1,k)$的特征值为1的特征向量,$\sum_i |\pi_i(k)| = 1$,具有

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{|\mathscr{R}|}|\pi_i(k) - \pi_i(k+1)| < \infty. \tag{7.3.9}$$

进一步,如果$\pi = \lim_{k\to\infty}\pi(k)$,那么$\pi$是定义 7.3.2 中的概率分布,即

$$\lim_{k\to\infty} P_{ij}(m,k) = \pi_j. \tag{7.3.10}$$

在§7.2关于矩阵$A(c)$和$G(c)$的假设下,对每个$k\geqslant 0$,存在$P(k-1,k)$的特征向量$q(c_k)$(是齐次马氏链的平稳分布,它的转移概率由(7.3.2)给定).进一步,在7.2.2节的补充假设下,若$\lim_{k\to\infty} c_k = 0$,则有$\lim_{k\to\infty} q(c_k) = \pi$.这里$|R|$维向量$\pi$是$R_{\text{opt}}$上均匀分布(见7.2.4).现在利用定理7.3.4(取$\pi(k) = q(c_k)$),为了证明强遍历性,只须说明下面两条满足

1. 马氏链是弱遍历的.
2. $q(c_k), k\geqslant 0$,满足(7.3.9).

利用(7.2.4)和(7.3.6)我们有

$$\lim_{k\to\infty} P\{X(k)\in R_{\mathrm{opt}}\} = 1. \tag{7.3.11}$$

对于原始形式的模拟退火，$q(c_k)$由下式给出

$$q_i(c_k) = \frac{\exp\{-(C(i)-C_{\mathrm{opt}})/c_k\}}{\sum_{j=1}^{|R|}\exp\{-(C(j)-C_{\mathrm{opt}})/c_k\}}, \tag{7.3.12}$$

Geman 等人[41,42]证明了(7.3.12)给出的 $q(c_k)$满足(7.3.9)他们还利用定理7.3.3 推导了为确保弱遍历性，序列$\{c_k, k=0,1,2,\cdots\}$所满足的一些充分性条件.

Geman 等人[41]首次获得这样一种条件. 他们说明如果存在 $k_0\geqslant 2$，对任意 $k\geqslant k_0$，

$$c_k \geqslant \frac{|R|\Delta C_{\max}}{\log k}, \tag{7.3.13}$$

其中

$$\Delta C_{\max} = \max\{C(i): i\in R\} - \min\{C(i): i\in R\}.$$

那么对于某个序列$\{c_k, k=0,1,2,\cdots\}$(7.3.7)满足，从而弱遍历性获得.

一个类似的但更严厉的界由 Anily 等人[43]按下列方式得出.

设 n 是一个整数，使得存在一个全局最小“结构”，它能够从其他任何“结构”在不多于 n 步转移中被达到(因为由 G 诱导的马氏链是不可约的，这样的 n 存在，且显然 $n<|R|$). 进一步，令

$$\Delta = \max_{i,j}\{C(j)-C(i): i\in R, j\in R_i, C(j)>C(i)\}, \tag{7.3.14}$$

$$\underline{A}(c) = \min_{i,j}\{A_{ij}(c): i\in R, j\in R_i\}. \tag{7.3.15}$$

Anily 等人证明了对于一般的接受和生成矩阵(满足 § 7.2 的条件)，收敛性被得到，如果

$$\sum_{k=1}^{\infty}(\underline{A}(c_{kn}))^n = \infty. \tag{7.3.16}$$

把这个结果应用于由(7.2.12)给出的接受矩阵这一特殊情况，得如下结论，如果

$$\forall k\geqslant 2,\qquad c_k\geqslant \frac{n\Delta}{\log k}, \tag{7.3.17}$$

那么对于整数序列 $k=in, i=1,2,\cdots$(7.3.7)满足，实际上，只要假设

$$\forall i,\qquad c_{in}\geqslant \frac{n\Delta}{\log(in)}, \tag{7.3.18}$$

就够了. 显然

$$n\Delta < |R| \cdot \Delta C_{\max}, \tag{7.3.19}$$

这表明由 Anily 等人给出的界比由 Geman 等人给出的界更严厉.

最严厉的界,由 Mitra 等人[42]得到,令

$$R_{\max} = \{i \in R : \forall ij \in R_i, C(j) \leqslant C(i)\}, \tag{7.3.20}$$

是局部极大"结构"集,并令

$$r = \min_{i \in R \setminus R_{\max}} \max_{j \in R} d(i,j), \tag{7.3.21}$$

其中 $d(i,j)$是从 i 转移到j 所需要的转移次数最小值. r 是这样一个整数使得至少存在一个非局部极大的"结构",从任何其他"结构"经过不多于 r 次的转移能够到达它,即(7.3.21)中的极小值在该"结构"达到,所以有 $r \leqslant n$. Mitra 等人证明了,如果

$$\forall\ k \geqslant 2, \qquad c_k \geqslant \frac{r\Delta}{\log k}, \tag{7.3.22}$$

那么对于数列 $k = i \cdot r, i = 1,2,\cdots$,(7.3.7)成立. 事实上,只下式满足就够了.

$$\forall\ i, \qquad c_{ir} \geqslant \frac{r\Delta}{\log(ir)}. \tag{7.3.23}$$

至此,我们列出了算法收敛到全局极小"结构"集的一些充分条件.

注 1 Gelfand 和 Mitter[44]讨论了收敛到任意"结构"集 I 的充分条件.

注 2 Hajek[45]和 Gidas[46]讨论了算法收敛的一些充分必要条件.

第八章　主成分分析神经网络算法

主成分分析(Principal Component Analysis, PCA)是一种经典的统计技术,用来分析多变量统计观察的协方差结构.通过 PCA 多变量可通过少数几个分量表示,所以 PCA 可看成是一种特征抽取技术,也可看成是一种数据压缩技术.PCA 与估计理论中的最小方差技术,时间序列分析中的 Karhunen Loéve(KL)变换以及数值分析中的奇异值分解密切相关,这些有关的方法在信号处理、图像编码和分析的应用中非常重要.

近年来,人们利用神经网络技术求解主成分显示出极大的优越性.自 Oja[47]1985 年提出的独立单元算法用于计算第一主成分后,许多用于求解 *PCA* 的神经网络模型和相应的算法问世.总的讲,所提出的方法分为两大类:一类是无导师学习的单层前向网;另一类是有导师多层感知神经网,这些方法的最大优点是具有自适应性,易于硬件化实现,属于智能化方法.

本章主要目的是介绍其中一些简单、通用的算法,利用随机逼近理论来讨论这些算法的收敛性.

§8.1　主成分分析

我们先叙述一些主成分分析要用到的线性代数学中关于矩阵谱分解的一些概念和事实.

定理 8.1.1(谱定理)　每个对称矩阵 $A\in R^{n\times n}$ 有谱因子分解,而且是正交地相似于对角矩阵 $\Lambda\equiv\mathrm{diag}\{\lambda_1\cdots\lambda_n\}$,即

$$A = X\Lambda X^{\mathrm{T}} = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i X_i X_i^{\mathrm{T}},$$

其中 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 是矩阵 A 的特征值,$X=[X_1\cdots X_n]$ 是相应的正交特征向量,X^{T} 是 X 的转置.

定义 8.1.2　(1)矩阵 $A\in R^{n\times m}$ 称为按列(行)随机的,如果 A 的每个元素 $a_{ij}\geqslant 0, 1\leqslant i\leqslant n, 1\leqslant j\leqslant m$,而且 $\sum_{i=1}^{n}a_{ij}=1, 1\leqslant j\leqslant m$ $\left(\text{相应地} \sum_{j=1}^{m}a_{ij}=1, 1\leqslant i\leqslant n\right)$;矩阵 A 称为是双随机的,如果它既是行随机的,又是列随机的.

(2)称矩阵 $A\in R^{m\times n}, m\neq n$ 是严格行(列)随机的,如果存在矩阵 B 使 $M=\begin{bmatrix}A\\B\end{bmatrix}$(相应地 $M=[A\,|\,B]$)是双随机的.

(3)称矩阵 $S\in R^{m\times n}, m\leqslant n$ 是行选择矩阵,如果在每行恰有一个元素等于1,且在每列至多有一个元素等于1,而其余元素均为零;类似地可以定义列选择矩阵.

易知矩阵 A 左乘一个行选择矩阵 S_r 得矩阵 $B_r=S_rA$, B_r 的行是 A 的行的子集,但没有 A 中行的重复,也不必保留它们在 A 中排列顺序;类似地右乘一个列选择矩阵 S_c 得 $B_c=AS_c$,它的列是 A 的不重复的子集.

一个交换矩阵是每行和每列都恰有一个元素是1,其余元素均是零的矩阵.显然每个交换矩阵是双随机的.

定理 8.1.3 (Birkhoff) 矩阵 A 是双随机的充分必要条件是 A 能表为某些交换矩阵 $P_1,\cdots,P_N$ 的凸组合,即存在正实数 $\alpha_1,\cdots,\alpha_N$ 使 $\alpha_1+\cdots+\alpha_N=1$,且有 $A=\sum_{i=1}^{N}\alpha_iP_i$.

推论 8.1.4 矩阵 $M\in R^{m\times n}$ 是严格行(列)随机的充分必要条件是它能表为某些行(列)选择矩阵 $S_1,\cdots,S_N$ 的凸组合,即存在正实数 $\alpha_1,\cdots,\alpha_N$ 使 $\alpha_1+\cdots+\alpha_N=1$ 且有 $M=\sum_{i=1}^{N}\alpha_iS_i$.

隐含在 PCA 中的思想最早出于 Pearson 在 1901 年提出的所谓线性回归. 1933 年 Hollelling 提出了 PCA 技术,并把它用于分析多个随机变量之间的相关结构.

考虑随机向量 $x=(x_1,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$,期望 $E\{x\}=0$,协方差矩阵 $R_x=E\{xx^{\mathrm{T}}\}\in R^{n\times m}$. 在 PCA 中,特性向量 y 是数据的一个正交线性变换

$$y=Wx,$$

其中 W 的行向量形成子空间 $\mathscr{L}$ 的一个正交基,即 $WW^{\mathrm{T}}=I$,且 $\mathscr{L}=\mathrm{span}(W)$. x 在 $\mathscr{L}$ 上的投影为

$$\hat{x}=W^{\mathrm{T}}Wx.$$

PCA 是寻找极小的平均平方误差

$$\begin{aligned}J_e&=E\{\|x-\hat{x}\|^2\}=E\{\mathrm{tr}[(x-\hat{x})(x-\hat{x})^{\mathrm{T}}]\}\\&=\mathrm{tr}(R_x)-\mathrm{tr}(WR_xW^{\mathrm{T}}).\end{aligned}\tag{8.1.1}$$

若将(8.1.1)中右边最后一项记为

$$\begin{aligned}J_v&\equiv\mathrm{tr}(WR_xW^{\mathrm{T}})=E\{\mathrm{tr}(yy^{\mathrm{T}})\}=E\left\{\sum_{i=1}^{m}y_i^2\right\}\\&=\mathrm{tr}(W^{\mathrm{T}}WR_xW^{\mathrm{T}}W)=E\{\mathrm{tr}(\hat{x}\hat{x}^{\mathrm{T}})\}\\&=\sum_{i=1}^{n}E\{\hat{x}_i^2\},\end{aligned}\tag{8.1.2}$$

因而 PCA 可等价地被看作极大化方差或极小化平均二乘方技术.

定理 8.1.5 (PCA)　设 $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n$ 是 R_x 的特征值,其相应的单位特征向量为 $e_1,\cdots,e_n$;那么在约束条件 $WW^T=I$ 下,J_e 的极小化解(等价于 J_v 的极大化解)有如下公式

$$W_{\text{opt}} = T[\pm e_1 \cdots \pm e_m]^T.$$

其中 T 是任意正交方阵.极小误差和极大方差分别是

$$\min J_e = \sum_{i=m+1}^{n} \lambda_i,$$

$$\max J_v = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i.$$

证明　我们在约束条件 $WW^T=I$ 之下不极大化 J_v.设 $U\wedge U^T$ 是 R_x 的谱因式分解.其中 $U=[e_1\cdots e_n]$,$\wedge=\text{diag}[\lambda_1\cdots\lambda_n]$;那么对于任意正交矩阵 $T\in R^{m\times m}$ 有

$$\begin{aligned} J_v &= \text{tr}(T^2 W R_x W^T T) \\ &= \text{tr}(T^T W U \wedge U^T W^T T) \\ &= \text{tr}(\widetilde{W} \wedge \widetilde{W}^T) \\ &= \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \sum_{j=1}^{n} \widetilde{W}_{ij}^2. \end{aligned}$$

其中 $\widetilde{W}=(\widetilde{W}_{ij})=T^T WU$;因为 $M\equiv[\widetilde{W}_{ij}^2]$ 是严格行随机矩阵,由推论 8.1.4 知严格行随机矩阵集 $\mathscr{A}$ 是凸的.因为 J_v 是 M 的线性函数;最优解在 $\mathscr{A}$ 的顶点达到,这样最优的 M 是一个行选择矩阵 S,从而 $\widetilde{W}=[\pm\sqrt{s_{ij}}]$,

$$W = T\widetilde{W}U^T = T[\pm e_{i(1)} \cdots \pm e_{i(m)}]^T,$$

$$J_v = \sum_{k=1}^{m} \lambda_{i(k)}.$$

显然当 $i(1)=1,\cdots,i(m)=m$ 时,J_v 达最大值,故

$$W_{\text{opt}} = T[\pm e_1 \cdots \pm e_m]^T,$$

$$\max J_v = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i,$$

$$\min J_e = \sum_{i=m+1}^{n} \lambda_i.$$

最大特征值相应的单位特征向量称为主特征向量.

§8.2　主成分分析神经网络算法

一个输入序列的主成分能通过如下一套程序逼近:首先是收集数据并计

算 R_x 的估计量(因为 R_x 不知道),此后是这个估计量的特征值分解和信号在具有所要求维数的主分量子空间上的投影.

必须指出这是近似 PCA,因为 R_x 的统计期望被样本平均代替. 按 PCA 的精确的随机框架,我们必须对带无限长的数据列工作,在这种情形上述的那套程序简直是不可用,因为必须等待全部数据收集到后才能开始计算. 在这种情形我们使用随机逼近技术,在极限意义下产生所要求的分量;其想法是每当一个新的输入到达,这个分量就被估计一次,随着时间的推移,这个估计越来越好,直至收敛到最优解;这技术也称为适应性技术,大多数神经网络算法属于这类技术,像大多数适应性技术一样,神经网络是对无限长数据列工作,且只要求比上述程序更少的贮存;因为各数据仅当它们到达时才被使用,而且不必为将来而记忆下来. 这样的方法还可用于寻找主成分子空间,而不必每次进行特征值分解.

本节建立神经网络与 PCA 间的联系,讨论 Hebbian 规则及其相关课题,诸如 Oja 模型,GHA 模型.

8.2.1 Hebbian 规则

设 $x_k \in R^n$ 是时刻 k 刺激或抑制一个神经元的输入向量,$y_k \in R$ 是该神经元的输出,$k=1,2,\cdots$. 假定 $\{x_k\}$ 是广义平稳随机列,期望向量 $Ex_k=\mu$,自相关矩阵 $R_x=E\{x_k x_k^{\mathrm{T}}\}$,$k=1,2,\cdots$ 是正定矩阵. 最简单形式的 Hebbian 规则的实行是

$$w_{k+1} = w_k + \beta_k(y_k x_k), \quad k = 1,2,\cdots, \tag{8.2.1}$$

其中(β_k)是一列小的步长参数,如果 x_k 和 y_k 是线性相关 $y=w^{\mathrm{T}}x$,那么 Hebbian 规则(8.2.1)变成

$$\frac{\Delta w_k}{\beta_k} = x_k x_k^{\mathrm{T}} w_k \tag{8.2.2}$$

根据随机逼近理论,对大的 k 能用确定性的常微分方程

$$\frac{\mathrm{d}w(t)}{\mathrm{d}t} = R_x w(t) \tag{8.2.3}$$

逼近(8.2.2),其中 $t = t(k) = \sum_{i=0}^{k} \beta_i$.

我们来详细地研究(8.2.3),将向量 $w(t)$ 表为 R_x 的单位特征向量正交基 $e_1,\cdots,e_n$ 的线性组合

$$w(t) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(t) e_i,$$

由(8.2.3)得

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\mathrm{d}\alpha_i(t)}{\mathrm{d}t}e_i = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i(t)R_x e_i,$$

$$\frac{\mathrm{d}\alpha_i(t)}{\mathrm{d}t} = \lambda_i\alpha_i(t), \quad i = 1,\cdots,n, \tag{8.2.4}$$

解为

$$\alpha_i(t) = \alpha_i(0)\mathrm{e}^{\lambda_i t}.$$

因为 R_x 是正定的,对一切 $i,\lambda_i>0$,故(8.2.4)是不稳定的.但因为 λ_1 是最大特征值,在所有的系数 $\{\alpha_i\}$ 中,α_1 增长最快,单位向量

$$u(t) =: w(t)/\|w(t)\|$$

在非主分量子空间 $\mathscr{L}_{\mathrm{npc}}\equiv\mathrm{span}(e_2,\cdots,e_n)$上的投影趋于零.

$$\frac{\sum_{i=2}^{n}(e_i^{\mathrm T}w(t))^2}{\|w(t)\|^2} = \frac{\sum_{i=2}^{n}\alpha_i(t)^2}{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i(t)^2}$$

$$= \frac{\sum_{i=2}^{n}(\alpha_i(0)/\alpha_1(0))e^{(\lambda_i-\lambda_1)t}}{1+\sum_{i=2}^{n}(\alpha_i(0)/\alpha_1(0))e^{(\lambda_i-\lambda_1)t}} \to 0 \quad (t\to\infty).$$

同时我们有

$$\|w(t)\|^2 \to \infty, \quad t\to\infty.$$

因此向量 $w(t)$ 趋于主分量子空间,且它的模无限增长.这样我们能把(8.2.1)描述为对神经元输入信号的一个不稳定的主成分分析.

8.2.2　对于单个主成分的Oja 规则

简单的 Hebbian 规则(8.1.1)产生的 w_k 接近主方向 e_1,同时它的模无限增大.为了使 w_k 的模保持不变,可采用归一化的 Hebbian 规则:

$$\widetilde{w}_{k+1} = w_k + \beta_k(y_k x_k), \tag{8.2.5}$$

$$w_{k+1} = \widetilde{w}_{k+1}/\|\widetilde{w}_{k+1}\|. \tag{8.2.6}$$

因为 w_k 被归一化,可避免不稳定性.但强制的归一化 Hebbian 规则不如由 Oja 和 Karhunen 在 1982 年提出的学习规则好.他们提出一个线性的 1 单元网络(参见图 8.2.1),此网络能从它的输入向量随机列 $\{x_k\}$,$x_k\in R^n$ 适应性地抽取恰好第一个主成分,输出值 y 是线性相关于输入 x.

$$y = w^{\mathrm T}x, \qquad w\in R^n.$$

他们提出的适应性规则(称为 Oja 规则)是

$$w_{k+1} = w_k + \beta_k(y_k x_k - y_k^2 w_k) \tag{8.2.7}$$

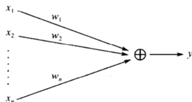


图 8.2.1 Oja 的简化神经模型

这是归一的 Hebbian 规则的线性化版本;Hebbian 部分是输入-输出乘积 $y_k x_k$,而归一化部分相应于 $-y_k^2 w_k$,这点可说明如下:由(8.2.5)和(8.2.6)得

$$\|\widetilde{w}_{k+1}\|^2 = \widetilde{w}_{k+1}^{\mathrm{T}}\widetilde{w}_{k+1} = 1 + 2\beta_k y_k^2 + O(\beta_k^2),$$

$$w_{k+1} = \widetilde{w}_{k+1}(1 + 2\beta_k y_k^2 + O(\beta_k^2))^{-1/2},$$

由 Taylor 展开,忽略 β^2 项得

$$w_{k+1} = \widetilde{w}_{k+1}(1 - \beta_k y_k^2),$$

将(8.2.5)的右式代入上式得

$$\begin{aligned} w_{k+1} &= w_k + \beta_k(y_k x_k - y_k^2 w_k) - \beta_k^2 y_k^3 x_k \\ &\approx w_k + \beta_k(y_k x_k - y_k^2 w_k), \end{aligned}$$

此即 Oja 规则.

关于(8.2.7)收敛性的主要定理要用到下面两条假设

A.1 输入序列$\{x_k\}$至少是广义平稳随机列,自相关矩阵 R_x 的特征值满足 $\lambda_1 > \lambda_2 \geqslant \cdots > \lambda_n > 0$,即最大特征值的重数为 1;相应的单位特征向量记为 $e_1, \cdots, e_n$.

A.2 步长参数列(β_k)满足:

$$\beta_k \to 0, k \to \infty; \quad \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k = \infty.$$

定理 8.2.1 如果A.1和A.2成立,且 $w_0^{\mathrm{T}} e_1 \neq 0$,那么当 $k \to \infty$ 时,(8.2.7)中的 w_k 以概率 1 趋于 e_1 或 $-e_1$,即

$$\lim_{k \to \infty} w_k = e_1(\text{或 } -e_1), \quad a.s.$$

证明 根据随机逼近理论的结果知[48],随机递推方程(8.2.7)收敛到确定的微分方程

$$\frac{\mathrm{d}w(t)}{\mathrm{d}t} = R_x w(t) - [w^{\mathrm{T}}(t) R_x w(t)] w(t), \qquad (8.2.8)$$

将 $w(t)$表为

$$w(t) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(t) e_i$$

(8.2.8)化为

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\mathrm{d}\alpha_i(t)}{\mathrm{d}t} e_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(t) \left[R_x e_i - \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j(t)^2 e_j^{\mathrm{T}} R_x e_j \right) e_i \right],$$

$$\frac{\mathrm{d}\alpha_i(t)}{\mathrm{d}t} = [\lambda_i - \sigma(t)] \alpha_i(t), \quad i = 1, 2, \cdots, n, \tag{8.2.9}$$

其中

$$\sigma(t) = w(t)^{\mathrm{T}} R_x w(t) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \alpha_j(t)^2.$$

由假设 $\alpha_1(0) \neq 0$,从方程(8.2.9)得

$$\alpha_1(t) = \alpha_1(0) \mathrm{e}^{\lambda_1 t - \int \sigma \mathrm{d}t} \neq 0, \qquad t \geqslant 0,$$

故可定义系数比 $\alpha_i(t)/\alpha_1(t), i = 1, 2, \cdots, n$ 且有

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\alpha_i}{\alpha_1}\right) &= \frac{1}{\alpha_1} \cdot \frac{\mathrm{d}\alpha_i}{\mathrm{d}t} - \frac{\alpha_i}{\alpha_1^2} \cdot \frac{\mathrm{d}\alpha_1}{\mathrm{d}t} \\ &= [\lambda_i - \sigma] \frac{\alpha_i}{\alpha_1} - [\lambda_1 - \sigma] \frac{\alpha_i}{\alpha_1} \\ &= [\lambda_i - \lambda_1] \frac{\alpha_i}{\alpha_1}, \end{aligned} \tag{8.2.10}$$

由 $\lambda_i - \lambda_1 < 0$ 知 $\lim_{t \to \infty} (\alpha_i / \alpha_1) = 0$,另外有

$$\frac{\mathrm{d}(\| w \|^2)}{\mathrm{d}t} = 2 w^{\mathrm{T}} \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} = 2 w^{\mathrm{T}} R_x w (1 - \| w \|^2). \tag{8.2.11}$$

这样对任意向量 w 有

$$0 \neq \| w \|^2 < 1 \Rightarrow \frac{\mathrm{d}(\| w \|^2)}{\mathrm{d}t} > 0, \tag{8.2.12}$$

$$\| w \|^2 = 1 \Rightarrow \frac{\mathrm{d}(\| w \|^2)}{\mathrm{d}t} = 0, \tag{8.2.13}$$

$$\| w \|^2 > 1 \Rightarrow \frac{\mathrm{d}(\| w \|^2)}{\mathrm{d}t} < 0. \tag{8.2.14}$$

除了 $\| w \| = 0$ 和 $\| w \| = 1$ 外,方程(8.2.11)没有其它的不动点,由假设 $w(0) \neq 0$,根据(8.2.12)～(8.2.14)得

$$\lim_{t \to \infty} \| w(t) \|^2 = 1,$$

故 $\alpha_1(t) \to 1, \alpha_i(t) \to 0, t \to \infty, i = 2, 3, \cdots, n$.

注　即使 R_x 是正半定,只要特征值 $\lambda_1 > 0$ 是单重的,定理仍成立.受影响的惟一部分是严格的不等式(8.2.12)或(8.2.14)将可能分别变为 $\geqslant$ 或 $\leqslant$,因为 $w(t)^{\mathrm{T}} R_x w(t) \geqslant 0$.但是等式不可能成立,这是因为对任意 $t, \alpha_1(t) > 0$,

故

$$w(t)^{\mathrm{T}}R_xw(t)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\alpha_i^2(t)\geqslant\lambda_1\alpha_1^2(t)>0.$$

显然(8.2.8)的任意不动点 $w\neq0$ 必须是 R_x 的特征向量. 这样一个点的范数由下面等式

$$\lambda_i\|w\|e_i-(\lambda_i\|w\|^2)\|w\|e_i=0,$$

决定,故 $\|w\|=1$. 反之 $w=0$ 和 R_x 的所有单位特征向量是(8.2.8)的不动点.

从定理 8.2.1 的证明清楚地看到,就比值$\frac{\alpha_i(t)}{\alpha_1(t)}$的动态行为而言,在稳定化项 $-\sigma(t)w(t)$中 $\sigma(t)$的选取是不重要的. 因为在(8.2.10)中 σ 消失了. 然而考虑稳定性时,σ的选择是很重要的. 例如Oja规则选取$\sigma(t)=w(t)^{\mathrm{T}}R_x w(t)$,引导到 $\|w(t)\|\to1$, $t\to\infty$,而简单的 Hebbian 规则(未归一化)选择 $\sigma(t)=0$,引导到 $\|w(t)\|\to\infty$, $t\to\infty$. 下面定理说明了这点.

定理 8.2.2 考虑常微分方程

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}=R_xw-(w^{\mathrm{T}}Bw)w,\tag{8.2.15}$$

其中 R_x 是正半定,其最大特征值 $\lambda_1>0$ 是单重的, B 是正定矩阵,设 e_1 是 R_x 的单位主特征向量,$e_1^{\mathrm{T}}w(0)\neq0$,那么

$$\lim_{t\to\infty}w(t)=\sqrt{\lambda_1/(e_1^{\mathrm{T}}Be_1)}\cdot e_1.$$

证明 我们沿着定理 8.2.1 的证明,带有一些修改. 正如注 1 中所讨论过的,R_x 的正半定性不会带来什么问题. 现在取 $\sigma=w^{\mathrm{T}}Bw$ 仍有

$$\lim_{t\to\infty}(\alpha_i(t)/\alpha_1(t))=0.$$

这样对任意 $\varepsilon>0$,存在 T 使得 $\forall\, t\geqslant T$,

$$|\alpha_i(t)/\alpha_1(t)|<\varepsilon$$

故有

$$\sigma(t)=\alpha_1(t)^2[e_1^{\mathrm{T}}Be_1]+\sum_{i\neq1}\alpha_1(t)\alpha_i(t)[e_1^{\mathrm{T}}Be_i]+\sum_{i,j\neq1}\alpha_i(t)\alpha_j(t)[e_i^{\mathrm{T}}Be_j],$$

$$\alpha_1(t)^2[e_1^{\mathrm{T}}Be_1]-\varepsilon M_1-\varepsilon^2M_2\leqslant\sigma(t)\leqslant\alpha_1(t)^2[e_1^{\mathrm{T}}Be_1]+\varepsilon M_1+\varepsilon^2M_2,\quad t\geqslant0,$$

其中

$$M_1=\sum_{i\neq1}|e_1^{\mathrm{T}}Be_i|,\qquad M_2=\sum_{i,j\neq1}|e_1^{\mathrm{T}}Be_j|,$$

由方程(8.2.9)得

$$\frac{\mathrm{d}\alpha_1^2}{\mathrm{d}t}=2\alpha_1\frac{\mathrm{d}\alpha_1}{\mathrm{d}t}=2(\lambda_1-\sigma)\alpha_1^2,$$

$$[\lambda_1-(e_1^{\mathrm{T}}Be_1+\varepsilon M_1+\varepsilon^2M_2)\alpha_1^2]\alpha_1^2$$

$$\leqslant\frac{\mathrm{d}\alpha_1^2}{\mathrm{d}t}\leqslant[\lambda_1-(e_1^{\mathrm{T}}B\tau_1-\varepsilon M_1-\varepsilon^2M_2)\alpha_1^2]\alpha_1^2,$$

$$\alpha_1^2<\frac{\lambda_1}{e_1^{\mathrm{T}}Be_1+\varepsilon M_1+\varepsilon^2M_2}\Rightarrow\frac{\mathrm{d}(\alpha_1^2)}{\mathrm{d}t}>0,$$

$$\alpha_1^2>\frac{\lambda_1}{e_1^{\mathrm{T}}Be_1-\varepsilon M_1-\varepsilon^2M_2}\Rightarrow\frac{\mathrm{d}(\alpha_1^2)}{\mathrm{d}t}<0,$$

所以

$$\limsup_{t\to\infty}\alpha_1(t)^2\leqslant\frac{\lambda_1}{e_1^{\mathrm{T}}Be_1+\varepsilon M_1+\varepsilon^2M_2},$$

$$\liminf_{t\to\infty}\alpha_1(t)^2\geqslant\frac{\lambda_1}{e_1^{\mathrm{T}}Be_1-\varepsilon M_1-\varepsilon^2M_2}.$$

令 $\varepsilon\to0$ 得

$$\lim_{t\to\infty}\alpha_1(t)^2=\frac{\lambda_1}{e_1^{\mathrm{T}}Be_1}.$$

一般说来(8.2.15)之类规则不能直接地推广来抽取多于一个的分量.

8.2.3　广义的 Hebbian 算法(GHA)

Sanger[49]提出了能抽取多个分量的方法,即所谓广义 Hebbian 算法(GHA).对于第一个分量它等同于 Oja 规则,它还能抽取其余的单位特征向量,这个模型有 m 个输出神经元 $y_1,\cdots,y_m$ 和 n 个输入 $x_1,\cdots,x_n$,在输入和输出之间只有前向(feedforward)联系,输出是输入的线性函数

$$y_i=w_i^{\mathrm{T}}x.$$

对于第 i 个神经元的方程是

$$\Delta w_{ij,k}=\beta_k(y_{ik}x_{jk}-y_{ik}\sum_{l\leqslant i}y_{lk}w_{lk,k}),\quad i,j=1,\cdots,n,\quad(8.2.16)$$

其中

$$w_i=[w_{i1}w_{i2}\cdots w_{in}]^{\mathrm{T}},\quad i=1,\cdots,n.$$

此模型在条件 A.2 和下面的条件 A.1′之下,抽取 R_x 的前面 m 个主单位特征向量.

A.1′　除了 A.1 的要求之外,还要求 R_x 的 m 个最大特征值是不同的

$$\lambda_1>\lambda_2>\cdots>\lambda_m\geqslant\lambda_{m+1}\geqslant\cdots\geqslant\lambda_n>0.$$

考虑与(8.2.16)关联的常微分方程

$$\frac{\mathrm{d}w_i}{\mathrm{d}t} = R_x w_i - \sum_{j<i} w_j w_j^{\mathrm{T}} R_x w_i - w_i^{\mathrm{T}} R_x w_i w_i, \quad i = 1, \cdots, m, \tag{8.2.17}$$

我们要证明$\lim\limits_{t\to\infty} w_i(t) = \pm e_i, i = 1, \cdots, m$.证明是采用归纳法.

对于第一个单元适合于Oja规则,故有$w_{1k} \to \pm e_1, k \to \infty$.现假设前面$m-1$个单元已经抽取了前面$m-1$个单位特征向量,即$w_i = \pm e_i, i = 1, \cdots, m-1$.这时方程(8.2.17)变成

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}w_m}{\mathrm{d}t} &= \Big(I - \sum_{j<m} e_j e_j^{\mathrm{T}}\Big) R_x w_m - (w_m^{\mathrm{T}} R_x w_m) w_m \\ &= \bar{R}_x w_m - \sigma w_m,\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}\bar{R}_x &= \Big(I - \sum_{j<m} e_j e_j^{\mathrm{T}}\Big) R_x, \\ \sigma &= w_m^{\mathrm{T}} R_x w_m.\end{aligned}$$

注意$\bar{R}_x$是R_x经m次缩减的结果,故$\bar{R}_x$的特征值是$[0, \cdots, 0, \lambda_m, \lambda_{m+1}, \cdots, \lambda_n]$.根据8.2.2节的分析,$w_m$将收敛到某个平行于第$m$个特征方向的向量$\mu e_m \neq 0$,由(8.2.17)的均衡条件,容易建立因子$\mu$满足:

$$\begin{aligned}0 &= \mu \bar{R}_x e_m - (\mu^2 e_m^{\mathrm{T}} R_x e_m) \mu e_m, \\ 0 &= \lambda_m - \mu^2 \lambda_m, \qquad \mu = \pm 1,\end{aligned}$$

故$\| w_m \| = 1$且$w_m(t) \to \pm e_m, t \to \infty$.

8.2.4 多分量的子空间规则

设$w = [w_1 \cdots w_m]^{\mathrm{T}} \in R^{n \times m}, m < n$是由输入$x \in R^n$到输出$y \in R^m$的前向(feedforward)加权(参见图8.2.2),

$$y = wx.$$

学习规则是

$$\Delta w_k = \beta_k (y_k x_k^{\mathrm{T}} - y_k y_k^{\mathrm{T}} w_k), \tag{8.2.18}$$

与其关联的常微分方程是

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} = w R_x - (w R_x w^{\mathrm{T}}) w. \tag{8.2.19}$$

(8.2.19)的第一项相应于偏导数$\frac{\partial J_1}{\partial w}$,其中$J_1$是输出方差

$$J_1 = \frac{1}{2} \mathrm{tr}(w R_x w^{\mathrm{T}}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m} E\{(w_i^{\mathrm{T}} x)^2\}$$

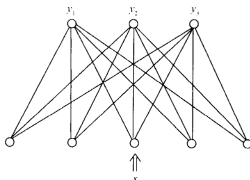


图 8.2.2 对于多主分量抽取的子空间模型

故第一项是推动系统向极大化方差的梯度攀升项,而第二项 $-(wR_xw^{\mathrm{T}})w$ 是避免权"爆炸"的一个稳定项.

显然单个单元的Oja规则(8.2.7)是(8.2.18) $m=1$时的特殊情况,(8.2.19)的不动点满足条件

$$wR_x = wR_xw^{\mathrm{T}}w,$$

如果 $\mathrm{rank}(w)=m$,那么在矩阵 wR_x 中存在 m 个独立的列是 $w^{\mathrm{T}}w$ 的相应于特征值为 1 的特征向量,这样 $w^{\mathrm{T}}w$ 的相应于特征值 $\lambda_1=1$,其重数为 m. 因为 $\mathrm{rank}(w^{\mathrm{T}}w)=m$,所有其他特征值必是 0,即 $\lambda_2=0$,其重数为 $n-m$. 故 $w^{\mathrm{T}}w$ 是一个投影矩阵. 我们将说明 w 展布的空间与前面 m 个主特征向量展布的空间相同. 为此,我们定义特征向量矩阵 E 的一个划分

$$E = [E_1 \mid E_2] = [e_1 \cdots e_m \mid e_{m+1} \cdots e_n],$$

$E_1 \in R^{n\times m}, E_2 \in R^{n\times(n-m)}$,并将 w 分解为惟一和

$$w = A_1E_1^{\mathrm{T}} + A_2E_2^{\mathrm{T}},$$

其中 $A_1 \in R^{m\times n}, A_2 \in R^{m\times(n-m)}$,用 E_1 和 E_2 右乘(8.2.19)分别得

$$\frac{\mathrm{d}A_1}{\mathrm{d}t} = A_1\Lambda_1 - \Sigma A_1, \tag{8.2.20}$$

$$\frac{\mathrm{d}A_2}{\mathrm{d}t} = A_2\Lambda_2 - \Sigma A_2, \tag{8.2.21}$$

其中 $\Lambda_1 = \mathrm{diag}[\lambda_1 \cdots \lambda_m], \Lambda_2 = \mathrm{diag}[\lambda_{m+1} \cdots \lambda_m], \Sigma = wR_xw^{\mathrm{T}}$.

类似于单一单元规则的证明,我们来考查比

$$Q(t) = A_1(t)^{-1}A_2(t)$$

随时间的演化. 假设 $A_1(0)$是非奇异的,由(8.2.20)推知,对一切 t, $A_1(t)$是

非奇异的,从而可以定义 $A_1^{-1}A_2$. 又因为

$$\frac{\mathrm{d}A_1^{-1}}{\mathrm{d}t} = -A_1^{-1}\frac{\mathrm{d}A_1}{\mathrm{d}t}\cdot A_1^{-1}$$

所以

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} &= A_1^{-1}\frac{\mathrm{d}A_2}{\mathrm{d}t} - A_1^{-1}\frac{\mathrm{d}A_1}{\mathrm{d}t}A_1^{-1}A_2\\ &= A_1^{-1}A_2\Lambda_2 - \Lambda_1 A_1^{-1}A_2\\ &= Q\Lambda_2 - \Lambda_1 Q.\end{aligned}$$

其解为

$$\begin{aligned}Q(t) &= \mathrm{e}^{-\Lambda_1 t}Q(0)\mathrm{e}^{\Lambda_2 t},\\ q_{ij}(t) &= \mathrm{e}^{(\lambda_{m+j}-\lambda_i)t}q_{ij}(0),\end{aligned}$$

因为 $\lambda_{m+j}<\lambda_i, i=1,2,\cdots,m, j=1,2,\cdots,n-m$,可以断言 $Q(t)\to 0, t\to\infty$,所以存在某个非奇异矩阵 $A_1(\infty)$使得 $w(t)\to A_1(\infty)E_1^{\mathrm{T}}$,而且$\mathrm{span}(w^{\mathrm{T}})=\mathrm{span}(E_1)$.

注 子空间方法并不是抽取分量,而是寻找这些分量展布的子空间.

参考文献

[1] 严士健,王隽骧,刘秀芳.概率论基础.北京:科学出版社.1982

[2] 王梓坤.随机过程论.北京:科学出版社.1965

[3] 钱敏平,龚光鲁.应用随机过程.北京:北京大学出版社.1998

[4] J.L.Doob. Measure Theory. New York:Springer -Verlag. 1994

[5] J.Neveu Discrete-Parameter Matingales. North-Holland. 1975

[6] K . L. Chung. Markov Chain with Stationary Transition Probabilities. 2nd ed. New York:Springer -Verlag. 1967

[7] H. Robbings, S. Monro. A stochastic approximation method. Ann. Math. Stat., 22 (1951),400~407

[8] J. Kiefer, J. Wolfowitz. Stochastic estimation of the modulus of a regression function. Ann. Math. Stat. 23(1952), 462~466

[9] H.J.Kushner, D.S.Clark. Stochastic Approximation for Constrained and Unconstrained Systems. New York:Springer -Verlag, 1978

[10] A.Benveniste, M.Métivier, P.Priouret. Adaptive Algorithms and Stochastic Approximations. New York:Springer -Verlag, 1990

[11] L. Ljung, G. Pflug, H. Walk. Stochastic Approximation and Optimization of Random Systems, Berlin Birkha user. 1992

[12] 陈翰馥,朱允民.随机逼近.上海:上海科学技术出版社. 1996

[13] J.H.Holland, Adaptation in Natureal and Artificial Systems. The University of Michigan Press, Ann Arbor, 1975

[14] G.Rudolph, Convergence analysis of Canonical Genetic Algorithms. IEEE Trans. Neureal Networks, 5(1994), 96~101

[15] J.Suzuki, A Markov chain analysis on simple genetie algorithms. IEEE Trans. System, Man and Cybernetics, 25(1995), 655~659

[16] J. Suzuki, A further result on the Markov chain model of genetic algorithms and its application to A simulated annealing - like strategy, IEEE Trans. System, Man and Cybernetics, 28(1998), 95~102

[17] G.Rudoph, Finite Markov Chain results in evolution computation:a tour d'horizon. Fundamenta informaticae (in press), (1998),1~22

[18] G.Rudoph, Convergence Properties of Evlutionary Algorithms. Kokac, Hamburg, 1997

[19] T.E.Davis, Toward an extrapolation of the simulated anneals convergence theory onto the simple genetic algorithm. PhD thesis, University Florida, Gainesville. 1991

[20] T.E.Davis and J.Principe, A Markov chain framework for the simple genetic algorithm. Evolutionary computation, 1(1993),3, 269~288

[21] S.W.Mahfoud and D.E.Goldberg, Parallel recombinative simulated annealing:A genetic

algorithm. Parallel Computing, 21(1995),1,1～28

[22] R. Cerf, The dynamics of mutation-selection algorithms with large population sizes. Ann. Inst. Henri Poincare, 32(1996), 455～508

[23] R. Cerf, Asymptotic convergence of genetic algorithms. Adv. Appl. Prob., 30(1998), 521～550

[24] J. A. Lozana, P. Larranaga, M. Grana and F. X. Albizuri, Genetic algorithms: Bridging the convergence gap. Theoretical Computer Science, (1999), 214

[25] Jun He, Lishan Kang, On the convergence rate of genetic algorithms. Theoretical computer science, 229, (1999), 23～39

[26] B. L. Miller, D. E. Godberg, Genetic algorithm, Tournament selection, and the effects of noise. Complex Systems, 9, (1995), 193～212

[27] Y. Leung, Y. Gao, Z. B. Xu, Degree of population diversity a perspective on premature convergence in Genetic Algorithms and its Markov chain analysis. IEEE Trans. Neural Networks, 8(1997),1165～1176

[28] Q. H. Duan, K. S. Leung, Z. B. Xu, C. K. Wong, A new model of simulated evolutionary computation: Global convergence analysis and specifications. IEEE Transaction on Evolutionary Computation. 5(2001), 1, 1～14

[29] 张文修,梁怡.遗传算法的数学基础.西安:西安交通大学出版社, 1999

[30] 徐宗本,高勇.遗传算法过早收敛现象的特征分析及其预防.中国科学(E),26(1996),4,364～375

[31] 张讲社,徐宗本,梁怡.遗传算法的整体退火选择及其收敛充要条件.中国科学(E),27(1997),2,154～164

[32] 徐宗本,陈志平,章祥荪.遗传算法基础理论研究的新近发展[J]. 数学进展,29(2000),2,97～113

[33] 徐宗本,聂赞坎,张文修.关于遗传算法公理化模型的进一步结果.工程数学学报 18(2001),1,1～11

[34] 徐宗本,聂赞坎,张文修.遗传算法的模拟退火型收敛性分析.运筹学学报(2002)

[35] 徐宗本,聂赞坎,张文修.父代种群参与竞争遗传算法几乎必然收敛性,应用数学学报(2002)

[36] 贺建勋,王志成.常微分方程.长沙:湖南科技出版社,1981

[37] P. J. M. Van Laarhoven, E. H. L. Aarts., Simulated Annealing: Theory and Applications. D. Reided Publishing Company, 1987, Dordrecht

[38] Rome, F. and A. L. Sangiovanni-Vincentelli, Probabilistic Hill Climbing Algorithms: properties and Applications, Proc. 1985 Chapel Hill conference on HLSI, May(1985), 393～417

[39] Seneta, E., Non-negative Matrices and Markov Chains, New York: Springer Verlag, 2nd ed. (1981)

[40] Isaacson, D. and R. Madsen, Markov Chains, Wiley, New York, 1976

[41] Geman, S. and D. Geman, Stochastic Relaxation, Gibbs Distributions, and the Bayesian Restoration of Images, IEEE Proc. Pattern Analysis and Machine Intelligence, PAMI-6 (1984)721~741

[42] Mitra, D., Romeo, F. and A. L. Sangiovanni Vincentelli, Convergence and Finite-time Behavior of Simulated Annealing, Adv. Appl Prob., 18 (1986) 747~771

[43] Anily, S. and A. Federgruen, Simalated Annealing Methods with General Acceptance probabilities J. Appl. Prob. 24(1987)657~667

[44] Gelfand, S. B. and S. K. Mitter, Analysis of Simulated Annealing for optimization Proc. 24 th Conf on Decision and Contral, Ft Landerdale, December 1985, 779~786

[45] Hajek, B., Cooling Scbedales for Optimel Annealing, Mathematics of Operations Research, 13(1988)311~329

[46] Gidas, B., Nonstationary Markov Chains and Convergence of the Annealing Algorithm, J. Statis., 39(1985)73~131

[47] E. Oja., On Stochastic Appriximation of the Eigthvectors and Eigthvalues of the Expetion of a Random Matrix. J. Math Anal. and Appl. 106(1985)69~84

[48] K. I. Diamantaras and S. Y. Kung, Principal Component Neural networks: Theory and Applications "A Wiley Interscience Publication" USA: John Wiley and Sons Inc. 1996

[49] T. D. Sanger, An optimality Principle for Unsupervised Learning. In D. S. Touretzky editor, Aduances in Neural Information Processing Systems, 11~19, Morgan Kaufmann, San Mateo, CA, 1989